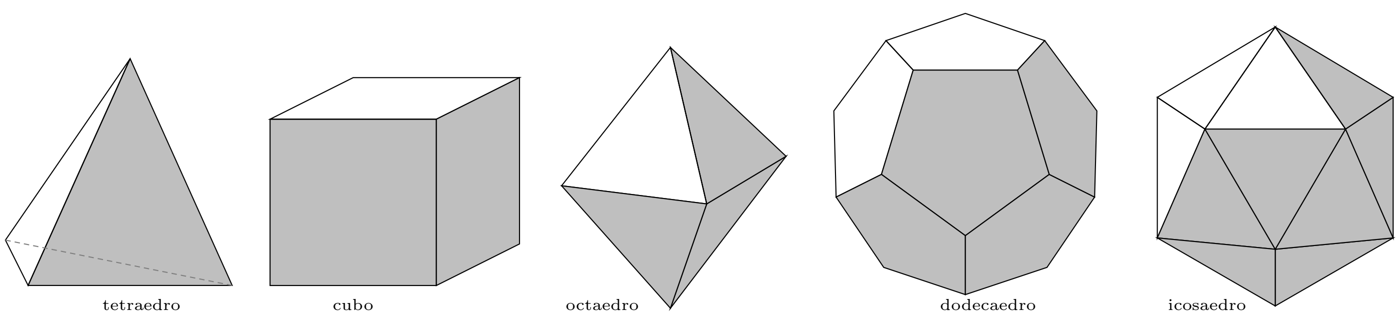
MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS

4^0 E.S.O. OPCIÓN B



10 de septiembre de 2005

Germán Ibáñez

Índice General

1 NÚMEROS. OPERACIONES CON NÚMEROS

1.1 Tipos de números

a. **Naturales:** $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

b. **Enteros:** $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

c. **Racionales:** Se pueden escribir de dos formas:

En forma **fraccionaria:** $-\frac{1}{4}, -\frac{328}{37}, \frac{3}{5}, \frac{29}{186}$

En forma **decimal:** $0'2, -0'827, -0'232323\ldots$

Los números racionales escritos en forma decimal se caracterizan porque las cifras de después de la coma se repiten: $\frac{1}{4} = 0'25000\ldots$, $\frac{10}{3} = 3'333\ldots$, $\frac{39}{7} = 5'571428571\ldots$

$$\begin{array}{l|l}
39 & 7 \\ \hline
\ \ 40 & 5'5714285\ldots \\
\ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 5 &
\end{array}$$

d. **Reales:** Son los racionales junto con los irracionales.

Los **irracionales** son aquellos cuya parte decimal no se repite:
$\pi = 3'141592654\ldots, \sqrt{2} = 2'414213562\ldots$

1.2 Motivos para ampliar el conjunto de los números

El motivo por el que se va ampliando el conjunto de números es que hay operaciones que no se pueden hacer todas las veces:

- Se pasa de los naturales a los enteros para poder restar siempre
- Se pasa de los enteros a los racionales para poder dividir siempre
- Se pasa de los racionales a los reales para poder hacer raíces de números positivos siempre y poder expresar cualquier longitud con un número.

1.3 Operaciones con los números: suma y producto

Suma La resta la consideraremos incluida en la suma.

Para sumar fracciones se reducen a común denominador:
Ejemplos:

- $\frac{2}{3} + \frac{15}{4} = \frac{8}{12} + \frac{45}{12} = \frac{8+45}{12} = \frac{53}{12}$
- $\frac{7}{4} - \frac{13}{6} = \frac{21}{12} - \frac{26}{12} = \frac{21-26}{12} = -\frac{5}{12}$
- $\frac{2}{3} - \frac{16}{9} - \frac{13}{6} = \frac{12-32-39}{18} = -\frac{59}{18}$

Producto La división la consideraremos incluida en la multiplicación.

- $\frac{7}{4} . \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{35}{12}$

- Cuando hay fracciones dentro de fracciones es mejor no multiplicar en cruz:
  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

  $$\frac{\;\frac{2}{3}\;}{\;\frac{7}{5}\;}$$

- $13 - \frac{\frac{3}{5}}{2} = 13 - \frac{3}{10} = \frac{130 - 3}{10} = \frac{127}{10}$

- Productos y cocientes por la unidad seguida de ceros

  $8957 \cdot 1000 = 8957000$
  $\frac{8957}{1000} = 8'957$
  $8957 \cdot 0'001 = 8'957$
  $\frac{8957}{0'001} = 8957000$

- Regla de los signos:

  En sumas o restas de numeros positivos y negativos primero se halla el signo del resultado, sabiendo que restar un número negativo es sumarlo.

  Ejemplo: $-15 - (-7) = -15 + 7 = -8$

  en producto y división:
  $$\begin{array}{ccccc} + & \text{por} & + & \text{da} & + \\ + & \text{por} & - & \text{da} & - \\ - & \text{por} & + & \text{da} & - \\ - & \text{por} & - & \text{da} & + \end{array}$$

  En productos y cocientes lo primero que se halla es el signo del resultado: si hay un número par de signos $-$ el resultado tiene $+$, en el otro caso, si el número es impar, tiene $-$.

  En las fracciones el sigo menos puede estar en cualquier sitio: $\frac{-7}{3} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$

1.4 Divisores de un número. Descomposición de un número en factores primos

El que un número sea divisor de otro (o sea que la división dé exacta) se estudia en los números enteros, por ejemplo 7 es divisor de 14.

Los ejemplos basta hacerlos con números positivos pues cambiando signos se extiende a todos los enteros.

Atendiendo a si un número tiene divisores o no hay dos tipos de números:

Los **primos** que sólo son divisibles por si mismos y por la unidad: el 2, el 17, etc.

Los **compuestos** cuando tienen además otros divisores: el 34, el 88, etc.

Hay infinitos números primos: $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$

Para comprobar si un número es primo se va haciendo la división por los números primos hasta que el cociente sea menor que el divisor que se prueba, si nunca da división exacta entonces es primo. En otro caso es compuesto.

Para no tener que hacer la división por los primeros números primos se utilizan los siguientes criterios de divisibilidad:

Un número es divisible por **2** cuando es par. Un número es par cuando acaba en cifra par, o sea en 0,2,4,6,8.

Un número es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es divisible por 3. Ejemplo: 978, $9 + 7 + 8 = 24$ que es divisible por 3.

Un número es divisible por **5** cuando acaba en 0 o en 5.

Ejemplo Comprobar si es primo 251
No es divisible por 2
$2 + 5 + 1 = 8$ luego no es divisible por 3
No es divisible por 5
Por 7: $251 : 7 = 35'8\ldots$, no es divisible por 7.
Por 11: $251 : 11 = 22'8\ldots$, no es divisible por 11.
Por 13: $251 : 13 = 19'3\ldots$, no es divisible por 13.
Por 17: $251 : 17 = 14'7\ldots$, no es divisible por 17.
Conclusión: 251 es primo.

Descomposición de un número en factores primos Se va dividiendo sucesivamente entre los números primos, cuando la división da exacta se sigue igual con el cociente obtenido.

$$\begin{array}{r|l}
1400 & 2 \\
700 & 2 \\
350 & 2 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array} \quad \text{luego } 1400 = 2^3.5^2.7 \qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
8775 & 3 \\
2925 & 3 \\
975 & 3 \\
325 & 5 \\
65 & 5 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array} \quad \text{luego } 8775 = 3^3.5^2.13$$

Tomando productos de la descomposición en factores de un número obtenemos sus divisores. Por ejemplo de 8775 son divisores $3^2 = 9, 3^3.5 = 45, 3.5^2.13 = 975$, etc

1.5 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Máximo común divisor de varios números es como su nombre indica el mayor de los divisores comunes de esos números.

Para hallar el máximo común divisor **mcd** hacemos el producto de todos los factores primos comunes con el menor exponente.
$\text{mcd}(1400, 8775) = \{2^3.5^2.7, 3^3.5^2.13\} = 5^2 = 25$
$\text{mcd}(252, 630) = 2.3^2.7 = 126$
$\text{mcd}(420, 1620, 2100) = 2^2.3.5 = 60$
Ejemplo: Si queremos hacer una estantería de manera que pueda servir indistintamente para carpetas y libros, ¿a que separación vertical hay que hacer los taladros para los soportes si las carpetas miden 36cm de alto y los libros 27cm?.
La solución la da el $\text{mcd}(36, 27) = 9$

Mínimo común múltiplo de varios números es como su nombre indica el menor de los múltiplos comunes de esos números.

Para hallar el mínimo común múltiplo **mcm** hacemos el producto de todos los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.
$\text{mcm}(1400, 8775) = \{2^3.5^2.7, 3^3.5^2.13\} = 2^3.5^2.7.3^3.13 = 491400$
$\text{mcm}(900, 432) = 2^4.3^3.5^2 = 10800$

Ejemplo: Hallar el menor número que al dividirlo por 16, 12 y 10 dé siempre de resto 7

Hallamos el mcm de 16, 12 y 10 que es 240, que al dividirlo por esos números da 0, para que dé 7 de resto le sumamos 7. El número buscado es 247.

1.6 Propiedades de la suma y el producto

Lo que se dice para la suma vale para la resta y lo que se dice para el producto sirve para la división. Las operaciones suma (+) y producto (.) de números cumplen las siguientes propiedades:

Conmutativa: a + b = b + a ; a . b = b . a

es decir: Para la suma, el orden de los sumandos no altera la suma.

Para la multiplicación, el orden de los factores no altera el producto.

Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c; \quad a.(b.c) = (a.b).c$

es decir: para sumar varios números da igual el orden en que se hacen las sumas . Lo mismo se diría para el producto.

Ejemplo: $5.\sqrt{3}.\sqrt{3} = 5.3 = 15$

En el caso del producto también se dice: para multiplicar un producto por un número se multiplica uno solo de los factores.

Elemento neutro: el 0 para la suma y el 1 para el producto

Elemento simétrico del número a es: el opuesto $-a$ para la suma y el inverso $\frac{1}{a}$ si $a \neq 0$ para el producto.

Ejemplos: de 3 el opuesto es -3 y el inverso $\frac{1}{3}$

de $\frac{5}{7}$ el inverso es $\frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5}$

Distributiva del producto respecto de la suma: $a.(b + c) = a.b + a.c$

es decir: para multiplicar una suma por un número se multiplica cada uno de los sumandos.

Ejemplos:

- $3(7 + \sqrt{5}) = 21 + 3\sqrt{5}$
- Leyendo al revés es la operación de sacar factor común: $21 + 3\sqrt{5} = 3.7 + 3\sqrt{5} = 3(7 + \sqrt{5})$
- No confundir con la asociativa del producto: $\frac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}$
- Simplificar indicando la propiedad que se aplica: $\frac{6 + 12\sqrt{10}}{3} = 2 + 4\sqrt{10}$

  He dividido numerador y denominador por 2.

  Como el numerador es una suma he aplicado la propiedad distributiva, dividiendo cada sumando.

  Para dividir $12\sqrt{10}$ por 3 he aplicado la propiedad asociativa del producto, dividiendo solo el 12.

$3 + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$ ESTÁ MUY MAL

1.7 Jerarquía de operaciones

Al calcular $2 + 5.3$ hay que saber el orden en que deben hacerse las operaciones. Se hace antes el producto que la suma y el resultado es $2 + 15 = 17$.

Cuando ha de hacerse una operación en orden diferente al de la jerarquía se usan paréntesis.

Cuando hay fracciones dentro de fracciones se puede considerar que lo que está encima o debajo de una raya de fracción es como si estuviera entre paréntesis.

La jerarquía de operaciones de primera a última es:

1. **Paréntesis**
2. **Potencias y raíces**
3. **Productos y cocientes**
4. **Sumas y restas**

Ejemplos

- $(2 + 5)3 = 7.3 = 21$
- $6 + 3^2.(-5) = 6 - 9.5 = 6 - 45 = -39$
- $7 + \dfrac{12}{3} = 7 + 4 = 11$
- $\dfrac{\frac{5}{6} + \frac{2}{3}}{7} - 4 = \dfrac{\frac{5+4}{6}}{7} - 4 = \dfrac{\frac{9}{6}}{7} - 4 = \dfrac{\frac{3}{2}}{7} - 4 = \dfrac{3}{14} - 4 = \dfrac{3 - 56}{14} = \dfrac{-53}{14}$

Problemas de números

1. Efectuar:

   a) $\dfrac{7}{3}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{5}{4}=$

   b) $\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{4}+\dfrac{19}{8}=$

2. Calcular:

   a) $\dfrac{7}{15}-\dfrac{5}{3}+\dfrac{9}{25}=$

   b) $\dfrac{1}{10}+\dfrac{13}{100}-\dfrac{123}{1000}=$

3. Calcular: $1-\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}{\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}}{5}-2}=$

   Solución: 46/27

4. Calcular: $\dfrac{6\frac{-13}{3}+5}{2}=$

5. Un grifo llena un depósito en 2 horas y otro lo llena en 3 horas.¿Cuánto tardan en llenarlo los dos a la vez?

6. Un obrero puede hacer cierta obra en 4 días y otro puede hacerla en 6 días. Trabajando juntos ¿cuántos días necesitarán?

7. Escribir los números primos desde el 1 al 100.

8. Comprobar si los siguientes números son primos:

   a) 8191 b) 541

   c) 7919 d) 893

9. Hallar los divisores de 240

10. Hallar los divisores comunes de 900 y 432

11. Descomponer en factores a) 118125, b) 52272

12. Hallar el mcd de a) 2268 y 28224, b) 2500 y 1800

    Hallar el mcm de a) 528 y 13068, b) 588 y 216

13. ¿Cuál es el menor número que puede dividirse por cada una de las cifras: 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

14. Hallar el menor número que dividido por 8, por 12 y por 15 da resto 6.

15. Suponiendo que hoy es jueves. Indica qué día de la semana será, cuando hayan transcurrido: a) 12 días b) 100 días, c) un año no bisiesto.

16. Queremos hacer una cuadrícula en una cartulina de 225 mm de largo por 210 mm de ancho. Cuánto ha de medir cada cuadrado para que sea lo más grande posible

17. Juan, Antonio y Pepe se tiraron de la moto y van a recuperación cada 8, 12 y 20 días respectivamente. Hoy han coincidido los tres.

    a) ¿Cada cuántos días volverán a coincidir?

    b) Si hoy es viernes, ¿dentro de cuantos días volverán a coincidir en viernes?

18. Simplificar indicando la propiedad que se aplica: $\dfrac{8\sqrt{5}+4}{2}$

19. Distinguir y relacionar:

    a) Las propiedades del producto asociativa y conmutativa

    b) La asociativa del producto y la distributiva.

20. El depósito de un coche marca 1/4, le echan 15 euros de gasolina a $0'78$ euros el litro y marca 3/4 el depósito. ¿Cuántos euros cuesta llenar el depósito?, ¿Cuántos litros caben en el depósito?

    30 euros, 38'4 litros

21. He mezclado 18 kilogramos de café de 2'8 euros kilogramo con 27 kilogramos de 3'57 euros kilogramo. ¿A como sale el kilogramo de la mezcla?

    3'262

22. Decir qué propiedad se aplica en cada caso:

    a) $(-5).9 = 9.(-5)$

    b) $3(2-6x) = 6-18x$

    c) $[3.(-5)].[14.(-4)] = 3.(-70).(-4)$

    d) $\dfrac{10+x}{4} = \dfrac{5+x}{2}$

    e) $\dfrac{4+6}{4} = \dfrac{2+3}{2}$

    f) $3+7\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

23. En unas rebajas cobran solo los 2/3 del precio marcado.

    a) Si el precio marcado es 126 €, ¿cuánto me rebajan?

    b) Si ha pagado 126 €, ¿cuál era el precio marcado?

    c) Si me rebajan 126 €, ¿cuánto pagaré?

2 POTENCIAS Y RADICALES

2.1 Potencia de un número

Dado un número real a y un entero positivo n se define potencia de base a y exponente n como el producto de a por sí mismo n veces.

$$a^n = a \cdots^{(n)} \cdots a$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

Se define potencia de base a y exponente negativo $-n$, como 1 partido por la misma potencia positiva, es decir: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

2.2 Propiedades de las potencias

1. $(a.b)^x = a^x.b^x$

   Para elevar un producto a una potencia se eleva cada uno de los factores.

2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

   Para elevar un cociente a una potencia, se eleva el numerador y el denominador.

3. $(a^x)^y = a^{x.y}$ Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes.

   Ejemplo: $(7^2)^3 = 7^6$

4. $a^x.a^y = a^{x+y}$ Para multiplicar dos potencias de igual base se suman los exponentes.

   Ejemplo: $7^2.7^3 = 7^5$

5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ Para dividir dos potencias de la misma base se restan los exponentes.

   Ejemplo: $\dfrac{7^2}{7^3} = 7^{-1}$

Observaciones: 1) con sumas o restas de potencias la única operación posible es sacar factor común. Por ese motivo: $3^2 + 5^2 = (3+5)^2 = 8^2$ ESTA MUY MAL.

2) al elevar una fracción a una potencia negativa se le da la vuelta: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$

Ejemplos:

1. Simplificar $\dfrac{360}{1200}$ descomponiendo en factores:

   $\dfrac{360}{1200} = \dfrac{2^3.3^2.5}{2^4.3.5^2} = \dfrac{3}{2.5} = \dfrac{3}{10}$

2. Calcular simplificando el resultado: $\left(\dfrac{2}{-3}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{2^2}{3^2} + \dfrac{2^3}{3^3} - \dfrac{2^2}{5^2} = \dfrac{392}{675}$

3. Efectuar y simplificar el resultado: $\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^2 = \frac{9^2}{8^2} \cdot \frac{2^5}{3^5} \cdot \frac{2^2}{5^2} = \frac{3^4}{2^6} \cdot \frac{2^5}{3^5} \cdot \frac{2^2}{5^2} =$
   $\frac{3^4.2^5.2^2}{2^6.3^5.5^2} = \frac{2^7.3^4}{2^6.3^5.5^2} = \frac{2}{3.5^2} = \frac{2}{75}$

2.3 Radicales

Son del tipo $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{17}$, $\sqrt[3]{-64}$.

Dado un número real a y un número natural n distinto de 0 , se dice que el número b es raíz de índice n del número a cuando la potencia de b de exponente n es a. Es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ cuando } b^n = a$$

Ejemplos: $\sqrt[3]{8} = 2$ pués $2^3 = 8$
La $\sqrt{3}$ cumple que multiplicada por sí misma es 3

Observaciones: 1) Se dan los siguientes nombres en $\sqrt[n]{a} = b$
$a =$ radicando, $b =$raíz, $n =$ índice ($n = 2$ no se pone), $\sqrt[n]{a} =$ radical

2)

$$\text{RADICANDO POSITIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow \quad \text{2 raíces; ejemplo: } \sqrt{4} = \pm 2 \\ \text{índice impar} & \longrightarrow \quad \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{125} = 5 \end{cases}$$

$$\text{RADICANDO NEGATIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow \quad \text{ninguna raíz real; ejemplo: } \sqrt{-4} \\ \text{índice impar} & \longrightarrow \quad \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{-8} = -2 \end{cases}$$

2.4 Propiedades de los radicales

Se deducen de las propiedades de las potencias:

1. Raíz de un producto es el producto de las raíces $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
   Ejemplo: $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

2. Raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

   Ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$

3. Raíz de una raíz es la raíz de índice el producto de los índices. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

   Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$

4. Raíz de una potencia es igual a la potencia de la raíz $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, (salvo signo)

   Ejemplo: $\sqrt[3]{5^2} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$

Observación: con raíces de sumas o sumas de raíces no hay nada que hacer.
Ejemplo: $\sqrt{9+4} = 3 + 2$ MUY MAL

2.5 Ejercicios con raíces

1. Calcular $\sqrt{3}\sqrt{27}$

   $\sqrt{3}\sqrt{27} = \sqrt{3.27} = \sqrt{81} = 9$

2. **Extraer factores fuera de la raíz:**

   Se divide el exponente por el índice y dentro queda el factor elevado al resto. Saliendo fuera del radical el factor elevado al cociente. Ejemplos:

   - $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^{2\cdot 3+1}} = 2^2\sqrt[3]{2}$
   - $\sqrt{81a^3} = \{81 = 3^4\} = 3^2 a\sqrt{a} = 9a\sqrt{a}$

3. **Introducir factores dentro del radical:**

   Se multiplica el exponente por el índice. Ejemplos:

   - $5\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5^3 x} = \sqrt[3]{125x}$
   - $\dfrac{3b^2}{a^5}\sqrt{\dfrac{a^2}{9b^3}} = \sqrt{\dfrac{3^2b^4a^2}{a^{10}9b^3}} = \sqrt{\dfrac{b}{a^8}}$

4. **Operaciones con radicales semejantes:**

   Se extraen factores y se saca factor común.Ejemplos:

   - Efectuar $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$

     $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3 + 5 - 1)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
   - Efectuar $3\sqrt{2} + \sqrt{8}$

     $3\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + \sqrt{4.2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
   - $\sqrt{27} - \sqrt{75} - \sqrt{300} = \sqrt{3^3} - \sqrt{5^2 3} - \sqrt{10^2 3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$

5. Simplificar $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

   $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

6. Simplificar $\dfrac{12\sqrt{2}+6}{8}$

   $\dfrac{12\sqrt{2}+6}{8} = \dfrac{6\sqrt{2}+3}{4}$

7. Simplificar $\dfrac{4\sqrt{3}+8}{2+\sqrt{3}}$

   $\dfrac{4\sqrt{3}+8}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{4(\sqrt{3}+2)}{2+\sqrt{3}} = 4$

2.6 Potencias de exponente fraccionario

Definimos potencias de base a y exponente $\dfrac{p}{q}$ como la raíz de índice el denominador de la potencia de exponente el numerador:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Si el exponente es negativo: $a^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$

Las propiedades son las mismas de otras potencias.

Ejemplo:

Simplificar: $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}6^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}12^{\frac{4}{8}}} = \dfrac{(2^3)^{\frac{2}{3}}(3.2)^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}(2^2.3)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^2 3^{\frac{3}{5}} 2^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}2.3^{\frac{1}{2}}} = 2^{2+\frac{3}{5}+\frac{5}{3}-1}.3^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{49}{15}}.3^{\frac{1}{10}}$

2.7 Notación científica

En las calculadoras aparecen expresiones del tipo: $8.37341 - 24$ que significan $8'37341.10^{-24}$;

Se llama notación científica y sirve para escribir números muy grandes: la distancia a una estrella; o números muy pequeños: el tamaño de un virus.

La notación científica se caracteriza porque después de la primera cifra hay coma decimal.

$3'247.10^{-4} = 3'247.\dfrac{1}{10^4} = 3'247.\dfrac{1}{10000} = 0'0003247$

Ejemplos: Efectuar:

- $3.10^8 + 5.10^7 = 3 \text{ EXP } 8 + 5 \text{ EXP } 7 = 350000000$
- $3.10^{18} + 5.10^{17} = 3 \text{ EXP } 18 + 5 \text{ EXP } 17 = 3'5.10^{18}$
- $\dfrac{3'2.10^{-7} + 5'4.10^{-8}}{2.10^{17}} = 1'87.10^{-24}$

Problemas de potencias y radicales

1. Calcular las potencias:

   $(-5)^2$; $\quad -5^2$; $\quad (-0'15)^2$; $\quad 0'01^4$; $\quad (-2/3)^3$

2. Reducir a una sola potencia

   a) $(-1/2)^2.(1/2)^5.(1/2)^3.(1/2) =$

   b) $\{[(-0'1)^2]^3\}^3 =$

   c) $[(-1/2)^2]^5 =$

3. Efectuar $(-1/2)^2 + (3/2)^3 - (5/3)^2 =$

4. Calcular

   a) $(-1/2)^{-1} =$

   b) $[(16/5) - 1'2]^{-3} =$

   c) $\left(\frac{1}{5} - 2\right)^{-2} =$

5. Simplificar descomponiendo en factores

   a) $\frac{3024}{4200}$

   b) $\frac{441}{1350}$

   c) $\frac{1331}{165}$

6. Efectuar y simplificar el resultado:

   $$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{12}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{-2}{15}\right)^2 =$$

   Solución: $\frac{2^{14}}{3^9.5^2}$

7. Efectuar y simplificar el resultado:

   $$\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$

8. Calcular simplificando el resultado:

   $$\frac{\left(\frac{12}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-3}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} =$$

   Solución: $\frac{2^{13}}{5^4.3^4}$

9. Calcular simplificando el resultado:

   $$\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^2 - \frac{5}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^3} =$$

10. Calcular simplificando el resultado:

    $$\left(\frac{2}{-3}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$$

    Solución: $\frac{-659}{108}$

11. Calcular simplificando el resultado:

    $$\left(\frac{10}{3}\right)^3 + \left(\frac{5}{12}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$$

    Solución: $\frac{5084}{135}$

12. Simplificar

    a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

    b) $\frac{3+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

13. Simplificar

    $$\frac{6+4\sqrt{3}}{2}$$

14. Simplificar $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

15. Simplificar $\frac{12\sqrt{7}+6}{8}$

16. Quitar la raíz del denominador $\frac{3}{5\sqrt{8}}$

17. Efectuar

    $$\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$$

18. Efectuar $\frac{6\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

19. Efectuar $3\sqrt{8} - 5\sqrt{2}$

20. Extraer factores del radical

    a) $\sqrt[3]{54}$

    b) $\sqrt{27x^{10}}$

    c) $\frac{x.y}{2}\sqrt{\frac{8}{x^2}}$

21. Introducir factores

    a) $3x^2\sqrt{2x}$

    b)$\frac{x^2}{4}\sqrt{\frac{8}{x^3}}$

22. Efectuar:

    a) $1'2.10^{15}.2.10^{-8}$

    b) $\dfrac{4'2.10^{13}+2.10^{19}}{2.10^{-8}}$

    c) $\dfrac{3'2.10^{7}-4.10^{8}}{2.10^{-8}+10^{-5}}$

    Solución: a) $2'4.10^{7}$, b) $1'0000021.10^{27}$, c) $-3'6.10^{13}$

23. Aproximadamente la distancia de la Tierra al sol es de $108'2$ millones de kilómetros. Expresar la distancia en metros en notación científica.

    Solución: $1'082.10^{11}$ m

24. En 197 gr de oro hay aproximadamente $6'02.10^{23}$ átomos de oro, si el diámetro de cada átomo es aproximadamente $2'76.10^{-8}$cm cuánto mediría una hipotética cadena de oro del grosor de un átomo que pesase 197 gr.

    Solución: $1'66152.10^{16}$ cm

25. Hallar el lado de un cuadrado que tenga la misma superficie que España.

    Solución: 505.000

26. Simplificar utilizando exponentes fraccionarios:

    $\dfrac{\sqrt[4]{12^7}}{\sqrt[5]{15^6}}$

    Solución: $\dfrac{2^{\frac{7}{2}}.3^{\frac{11}{20}}}{5^{\frac{6}{5}}}$

27. Simplificar utilizando exponentes fraccionarios:

    $\dfrac{\sqrt[8]{9^5}.\sqrt{8^3}}{\sqrt{32}}$

    Solución: $3^{\frac{5}{4}}.2^2$

28. Simplificar:

    $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{-\frac{3}{4}}}{\left(\frac{8}{12}\right)^{7}}$

    Solución: $3^{\frac{59}{10}}.2^{-\frac{141}{20}}.5^{\frac{3}{4}}$

3 ECUACIONES Y SISTEMAS

3.1 Ecuaciones

Muchos problemas se resuelven expresando las relaciones que hay entre números conocidos y otros desconocidos a los que por no saber lo que valen les llamamos **incógnitas**

Ejemplos:

1. He comprado por 472’5 euros una tele y una cámara de fotos. La tele vale 50’60 euros más que la cámara. ¿Cuánto vale la cámara?

precio tele = precio cámara $+50'60$	llamando x al precio de la cámara
precio cámara + precio tele $= 472'5$	precio tele $= x + 50'60$
precio cámara + precio cámara $+50'60 = 472'5$	$x + 50'6 + x = 472'5$
2 veces precio cámara $+50'60 = 472'5$	$2x + 50'6 = 472'5$
2 veces precio cámara $= 472'5 - 50'6$	$2x = 472'5 - 50'6$
2 veces precio cámara $= 421'9$	$2x = 421'9$
precio cámara $= \dfrac{421'9}{2} = 210'95$ euros	$x = \dfrac{421'9}{2} = 210'95$ euros

2. Una chica que dentro de cuatro años cumplirá los 18 tiene ahora el doble de edad que su hermano menor. ¿Cuál es la edad del hermano menor?

   Si llamamos x a la edad del hermano menor resulta $2x + 4 = 18$

3. Un coche tiene el depósito de gasolina a 3/4, hace un primer viaje y consume 2/5 del depósito y en un segundo viaje consume 1/4 más quedando en el depósito 12 litros. ¿Cuál es la capacidad del depósito?.

   Llamamos x a la capacidad total del depósito. $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{2x}{5} + \dfrac{x}{4} + 12$

Una **ecuación** es una igualdad con alguna incógnita que se representa por una letra. Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que hace que se cumpla la igualdad.

Para **resolver** una ecuación se opera hasta dejar sola la incógnita x

Solución de una ecuación es un número que al sustituir por él la incógnita x cumple la igualdad.

3.2 Propiedades de las igualdades y aplicación a la resolución de ecuaciones

- **PRIMERA** Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una igualdad la igualdad se conserva.

  Aplicación a ecuaciones: Se aplica para la transposición de términos: un término que está sumando pasa restando y viceversa.

  Ejemplos:

$3 + x = 5$	$3x + 2 = 5 - 2x$
$(-3 + 3 + x = 5 - 3)$ no se suele poner	$3x + 2x = 5 - 3$
$x = 5 - 3$	$5x = 3$

- **SEGUNDA** Si se multiplican o dividen los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad se conserva.

Aplicación a ecuaciones: 1^a Aplicación : quitar denominadores; se multiplica todo por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Se va multiplicando cada numerador por lo que le falta a su denominador para ser el denominador común.

Ejemplo: $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{3x}{5}=1;\quad \dfrac{5(2x-1)+3.3x}{15}=\dfrac{15}{15};\quad 5(2x-1)+9x=15$

2^a Aplicación: despejar la x pasando el coeficiente con su signo al otro miembro.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l|l} -5x=3 & \dfrac{x}{3}=7 \\ x=-\dfrac{3}{5} & x=21 \end{array}$$

3^a Aplicación: Cambiar de signo a toda la ecuación:

Ejemplo: $-\dfrac{x+1}{2}-3=5-x;\quad \dfrac{x+1}{2}+3=-5+x$

3.3 Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación es despejar la incógnita, aislarla en el primer miembro:

Ejemplo: Resolver:

$$2x-\frac{3-5x}{6}=8x+\frac{2}{3}$$

$$\frac{12x-(3-5x)}{6}=\frac{48x+4}{6}$$

$$12x-3+5x=48x+4$$

$$17x-48x=4+3$$

$$-31x=7$$

$$x=-\frac{7}{31}$$

Observaciones: Además de lo visto es bueno tener en cuenta:

1. Se puede cambiar de signo a toda una ecuación multiplicando por -1. Esto se hace cuando hay mayoría de signos menos que son incómodos.

   Ejemplo: $-2x-\dfrac{3-x}{2}=5\quad 2x+\dfrac{3-x}{2}=-5$

2. Se le puede dar la vuelta a una ecuación, por ejemplo para poner las incógnitas en el primer miembro.

   Ejemplo: $\dfrac{3}{5}=\dfrac{2x-1}{6};\quad 18=5(2x-1);\quad 18=10x-5;\quad 18+5=10x\quad 10x=23$

Ejemplo:

Resolver la ecuación siguiente indicando la propiedad que se aplica en cada paso: $\dfrac{3x}{2}=7-x$

$\dfrac{3x}{2}=7-x$	para pasar la x al 1^{er} miembro sumo x a los dos miembros	$\dfrac{3x}{2}+x=7-x+x$
$\dfrac{3x}{2}+x=7$	multiplico por 2 ambos miembros para quitar denominadores	$2\dfrac{3x}{2}+2.x=2.7$
$3x+2x=14;\quad 5x=14$	divido ambos miembros por 5 para despejar la x	$\dfrac{5x}{5}=\dfrac{14}{5}$
$x=\dfrac{14}{5}$		

3.4 Resolución de problemas de ecuaciones

Ejemplo

Si tuviera 40 euros más de los que tengo podría comprar unos zapatos por 160 euros y me sobrarían aún 8 euros. ¿Cuántas euros tengo?

1) Poner incógnita con nombre de número: $x =$ número de euros que tengo
2) Plantear la ecuación siguiendo las instrucciones del enunciado $x + 40 = 160 + 8$
3) Resolver la ecuación $x = 160 + 8 - 40$

$x = 128$

3.5 Sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones son varias ecuaciones que relacionan a las mismas incógnitas.

Ejemplo: La suma de las edades de un padre y un hijo es 40 y la diferencia es 24.

Sea x la edad del padre, y la edad del hijo, entonces: $\left\{\begin{array}{l} x+y=40 \\ x-y=24 \end{array}\right.$

Se llama **solución del sistema** a los números que cumplen las ecuaciones es decir que al sustituir en el sistema verifican todas las ecuaciones. En el ejemplo $x = 32$ $y = 8$.

3.6 Métodos de resolución de sistemas

- **Método de sustitución**

  Se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en la otra:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ x-5y=-10 \end{array}\right. \qquad x = 5y - 10 \qquad \begin{array}{l} 2(5y-10)+3y=9 \\ 10y-20+3y=9 \\ 13y=29 \end{array} \qquad y = \frac{29}{13} \quad x = 5\frac{29}{13} - 10 = \frac{15}{13}$$

- **Método de reducción**

  Se multiplican las ecuaciones por números convenientes para que al sumar desaparezca alguna incógnita:

1. $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ x-5y=-10 \end{array}\right.$ si multiplicamos por -2 abajo y sumamos desaparecerá la x $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ \underline{-2x+10y=20} \end{array}\right.$ $13y = 29$

   $y = \frac{29}{13}$, sustituyendo en la 2^a obtenemos la x: $x = \frac{15}{13}$

2. $\left\{\begin{array}{l} 3x-8y=2 \\ 5x-9y=6 \end{array}\right.$ multiplicamos la de abajo por el coeficiente de x de la primera y le sumamos la primera multiplicada por el de la segunda cambiado de signo, es decir: $2^a \cdot 3 + 1^a \cdot (-5)$

$$\begin{array}{r} 15x-27y=18 \\ \underline{-15x+40y=-10} \\ / \quad 13y=8 \end{array}$$

   sustituyendo por ejemplo en la primera $3x - 8\frac{8}{13} = 2$; $3x - \frac{64}{13} = 2$; $3x = 2 + \frac{64}{13} = \frac{26+64}{13}$; $3x = \frac{90}{13}$; $x = \frac{90}{39} = \frac{30}{13}$

Problemas de ecuaciones y sistemas

1. Con 39 litros de gasolina el marcador del depósito de mi coche marca 3/4. ¿Cuál es la capacidad total del depósito?

2. En una familia la edad del padre es 64 años y las edades de los 4 hijos suman 32 años. ¿Cuantos años pasarán para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos?

3. La suma de dos números consecutivos es 783. Hallarlos.

4. Resolver
$$\frac{x+1}{2} = 5$$

5. Resolver
$$\frac{3x}{2} - \frac{5}{3} = \frac{7}{6}$$
Solución: 17/9

6. Resolver
$$\frac{6x}{3} - \frac{x}{6} = 3x$$

7. Resolver
$$\frac{1}{5} - \frac{2x}{15} = \frac{x}{3}$$

8. Resolver
$$8 - \frac{2-x}{3} = \frac{7}{3}$$

9. Resolver
$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 19$$
Solución: 228/7

10. Resolver
$$\frac{x+1}{4} + \frac{3x-9}{10} = \frac{2x-3}{5} - \frac{1}{2}$$

11. Resolver $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{2x+3}{3}$
Solución: $-3'8$

12. Resolver $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{30}{4} = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{1}{6}$
Solución: 92/21

13. Resolver
$$\frac{x-2}{3} + \frac{2x+1}{4} = 3 - \frac{2x-3}{6}$$
Solución: 47/14

14. Resolver $\dfrac{3x-2}{9} + x - \dfrac{8x}{3} = \dfrac{5x-4}{-3}$

15. Resolver
$$\frac{5x-3}{10} - \frac{3x-2}{4} = \frac{2-3x}{4} + 4x$$
Solución: $-3/35$

16. Resolver $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{x-3}{6}$

17. Resolver $6x - 5\dfrac{-8}{3} + 7\dfrac{-5}{9} = 4$
Solución: $-49/54$

18. Resolver indicando las propiedades de las igualdades que se aplican.
$$13 - \frac{x-2}{5} = 7x$$

19. Repartir 700 euros entre tres personas de manera que la primera tenga 75 euros más que la segunda y ésta 25 más que la tercera.

20. Un tren que recorre 120 km en una hora sale de una estación. Dos horas más tarde sale otro tren que recorre 180 km en una hora. ¿Cuánto tardará en alcanzarle?

21. En un huerto se han sembrado dos quintas partes de lechugas, 3/7 de tomates y quedan todavía 50 m^2, ¿cuál es la superficie del huerto?

22. Un abuelo dice a sus nietos: multiplicando mi edad por un cuarto de su sexta parte y dividiendo el producto por los 8/9 de la misma hallaréis 243 años, ¿cuál es mi edad?.

23. En las rebajas he pagado por un artículo 28'9 €. Me han aplicado un 16 % de rebaja. ¿Cuál era el precio de partida?

24. Un número de dos cifras que empieza por 4 disminuye en 9 unidades al invertir el orden de sus cifras. Encontrarlo.

25. Resolver
$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$$

26. Resolver
$$\begin{cases} 3x - 5y = -50 \\ 4x - 2y = -34 \end{cases}$$

27. Resolver
$$\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ -5x + 3y = -13 \end{cases}$$

28. Resolver
$$\begin{cases} 7x - 5y = 38 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

29. Resolver por todos los métodos
$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$
Solución: $x = 24/13, y = -42/13$

30. Resolver por todos los métodos
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

31. Resolver $\begin{cases} x - y = 2(x + y) \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

32. Resolver $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 3(x + y - 1) = x - y + 1 \end{cases}$

33. Resolver $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 0 \\ \frac{2x+y}{3} - \frac{x+y+2}{4} = 0 \end{cases}$

Solución: $x = 11/7, y = -13/7$

34. Resolver
$$\begin{cases} 3x - (9x + y) = 5y - (2x + 9y) \\ 4x - (3y + 7) = 5y - 47 \end{cases}$$

35. Resolver
$$\begin{cases} 2(y - 2) - 3(x - 3) = -14 \\ 3(x - 6) - (y + 9) = 54 \end{cases}$$
Solución: $x = 143/3, y = 62$

36. Resolver $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \\ \frac{x-4}{2} - \frac{y-2}{5} = 3 \end{cases}$

Solución: $x = 138/7, y = 184/7$

37. Resolver $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = -\frac{13}{36} \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases}$

38. Entre dos estantes de una librería hay 80 libros. Si se pasan 10 libros del segundo al primer estante, ambos tienen el mismo número de libros. ¿Cuántos había al principio en cada uno?.

39. Un día por 5 fantas y 3 bolsas de patatas fritas cobran 11 euros. Otro dia por 2 fantas y 4 bolsas de patatas fritas cobran 7'5 euros. ¿Cuánto vale cada cosa?

40. Una factura de 410 pesos es pagada con 3 dólares y 2 libras esterlinas y otra de 2940 pesos con 10 dólares y 20 libras. Calcular el cambio a que están los dólares y las libras.

41. En una tienda venden el kilo de café natural a 8'32 euros y el torrefacto a 8'08 euros. Un cliente pide un kilo de café mezcla de los dos. El cliente paga 8'26 euros. ¿Qué cantidad de cada clase se ha mezclado?

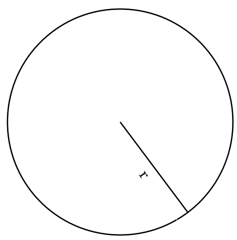
42. Hallar un número de dos cifras tal que las cifras suman 12 y el número que resulta al invertir el orden de las cifras sea 36 unidades menor.

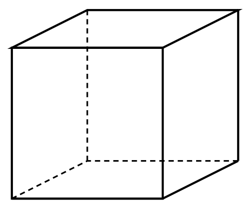
4 EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS.

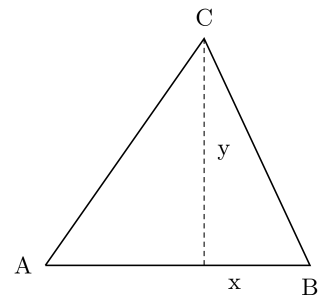
4.1 Expresiones algebraicas

Las fórmulas de las áreas y volúmenes de geometría están dadas por números y letras ligadas entre sí por operaciones aritméticas.

Área del círculo: $A = \pi . r^2$ Volumen del cubo: $V = x^3$ Área del triángulo: $A = \dfrac{x \cdot y}{2}$







Se llama **expresión algebraica** a una expresión con operaciones entre números y letras.

Las letras representan números no determinados de momento, pero por ser números las operaciones y las propiedades son las mismas de los números.

A las letras se les llama **variables**.

4.2 Polinomios

Las expresiones del tipo $3x^2 - 5x + 4$ se llaman **polinomios**. Para nombrarlos se usa $p(x) = 7x^6 - 4x^4 - 3x + 1$, se lee ”p de equis”.

Cuando hay un solo sumando, por ejemplo $3x^2$, se llama **monomio** y cuando hay dos se llama binomio por ejemplo $1 - 6x^2$.

Grado de un polinomio es el mayor exponente de x que aparece, por ejemplo, si $p(x) = 3x^4 - 2x$ se dice que el polinomio $p(x)$ tiene grado 4.

4.3 Suma y producto de polinomios

Suma y resta de polinomios Para sumar dos polinomios se pone uno a continuación del otro y se reducen términos semejantes.

Ejemplo: Para sumar $f(x) = 1 - 2x^2 + x$ con $g(x) = 2x^2 + 3x$ hacemos
$f(x) + g(x) = 1 - 2x^2 + x \quad + \quad 2x^2 + 3x = 4x + 1$
Para restar hay que poner el sustraendo entre paréntesis y luego quitarlo:
$f(x) - g(x) = 1 - 2x^2 + x \quad - \quad (2x^2 + 3x) = 1 - 2x^2 + x - 2x^2 - 3x = -4x^2 - 2x + 1$

Producto Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva multiplicando todos los términos del primer factor por todos los términos del segundo factor:

Ejemplos:

- $(7x^2 - 9x + 1) \cdot 4x^3 = 28x^5 - 36x^4 + 4x^3$

- $(2x+3)(5x-4) = 2x\cdot 5x - 2x\cdot 4 + 3\cdot 5x - 3\cdot 4 = 10x^2 - 8x + 15x - 12 = 10x^2 + 7x - 12$
- $(x^4 - 3x^2 + 6)(5x^4 - 6x^2) = 5x^8 - 6x^6 - 15x^6 + 18x^4 + 30x^4 - 36x^2 = 5x^8 - 21x^6 + 48x^4 - 36x^2$

4.4 Igualdades notables

- $(-a)^2 = a^2$. Ejemplos: $(-3)^2 = 3^2$, $\quad (-3-x)^2 = [-(3+x)]^2 = (3+x)^2$, $\quad (-3+x)^2 = (x-3)^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble del primero por el segundo.

  Ejemplo: $(3+x)^2 = 9 + x^2 + 6x$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. El **cuadrado de una resta** es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos el doble del primero por el segundo.

  Ejemplo: $(5x - x^3)^2 = 25x^2 + x^6 - 10x^4$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. **Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados**.

  Ejemplo: $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 9 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 5 = 4$

4.5 Fracciones algebraicas

Son fracciones en las que hay letras en el denominador: $\dfrac{3x+2}{1+x}$

Simplificación Se divide arriba y abajo por el mismo factor, teniendo en cuenta que para dividir una suma hay que dividir cada sumando:

- $\dfrac{3x^5}{x^7} = \dfrac{3}{x^2}$
- $\dfrac{3+9x}{6} = \dfrac{1+3x}{2}$
- $\dfrac{3(1+x)^2 - (x^2+1)(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{3(1+x) - (x^2+1)}{1+x} = \dfrac{3+3x-x^2-1}{1+x} = \dfrac{-x^2+3x+2}{1+x}$

Suma y resta Reducimos a común denominador:

- $\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x(x+3)}{2x} + \dfrac{2}{2x} = \dfrac{x^2+3x+2}{2x}$
- $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{5(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3(x+1) - 5(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x+3-5x+5}{x^2-1} = \dfrac{-2x+8}{x^2-1}$

Producto y cociente

- $\dfrac{3x}{x+2} \cdot \dfrac{1-x}{5} = \dfrac{3x(1-x)}{(x+2)5} = \dfrac{3x-3x^2}{5x+10}$
- $\dfrac{\frac{x}{1-x}}{\frac{5}{6x}} = \dfrac{6x^2}{(1-x)5} = \dfrac{6x^2}{5-5x}$

4.6 División de polinomios

En los numeros teníamos la división entera: $\begin{array}{r|l} 37 & 12 \\ \hline 01 & 3 \end{array}$

Cumpliéndose: "dividendo = divisor × cociente + resto"

De la misma forma para los polinomios:

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+11x^2+9x+1 & 2x^2-x \\ \cline{2-2} -4x^3+2x^2 & 2x+\frac{13}{2} \\ \cline{1-1} 0+13x^2+9x+1 & \\ \quad -13x^2+\frac{13}{2}x & \\ \hline \qquad \frac{31}{2}x+1 & \end{array}$$

En los polinomios se puede dividir hasta que el resto es de menor grado que el divisor.

También: dividendo = divisor × cociente + resto, abreviadamente: $D = d \times Q + R$
$4x^3 - 2x^2 + 9x + 1 = (2x^2 - x).2x + (9x + 1)$
Observamos que el grado del dividendo es igual al grado del divisor más el grado del cociente.

4.7 Regla de Ruffini

Es un procedimiento abreviado de división, cuando el divisor es de la forma $x - a$:
Ejemplo: $(2x^3 - 3x^2 + 1) : (x - 8)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 8 & & 16 & 104 & 832 \\ \hline & 2 & 13 & 104 & \boxed{833} \end{array}$$

$Q = 2x^2 + 13x + 104$
$R = 833$

4.8 Valor numérico de un polinomio

Valor numérico de un polinomio para $x = b$ es lo que resulta de sustituir en el polinomio x por b:
Valor numérico para $x = 2$ de $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7$, es: $f(2) = 5.8 + 2.4 - 7 = 40 + 8 - 7 = 41$

Un número b es **raíz** de un polinomio cuando el valor numérico del polinomio en b es 0, es decir, b es raíz de $f(x)$ cuando $f(b) = 0$.
Ejemplo: 2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$ porque $f(2) = 3.8 - 5.4 - 4 = 0$

Por tanto, es lo mismo decir que b es raíz del polinomio $f(x)$, que decir que b es solución de la **ecuación** $f(x) = 0$.
Ejemplo:
2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$, es igual que, 2 es solución de la ecuación $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$.

4.9 Ecuación de segundo grado

La expresión general de una ecuación de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$
Cuando alguno de los coeficientes es igual a 0 se llama **ecuación incompleta** de segundo grado.
Hay que tener en cuenta que no existen raíces cuadradas de números negativos.

I) no hay término en x : O sea $b = 0$, es de la forma $ax^2 + c = 0$. se resuelve despejando x.

Ejemplos:

$2x^2 - 7 = 0$
$2x^2 = 7$
$x^2 = \dfrac{7}{2} \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{7}{2}} = 1'87 \\ x_2 = -\sqrt{\frac{7}{2}} = -1'87 \end{cases}$

$3x^2 + 5 = 0$
$3x^2 = -5$
$x^2 = \dfrac{-5}{3} \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{-5}{3}}$ que no da solución real

II) no hay término independiente: O sea $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$. Se saca factor común la x y luego se aplica que para que un producto se anule ha de anularse uno de los factores.

Ejemplo: $3x^2 + 2x = 0$;

$x(3x+2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2: \quad 3x + 2 = 0 \quad 3x = -2 \quad x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

III) Caso general. Ecuación completa: $ax^2 + bx + c = 0$

Se aplica la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

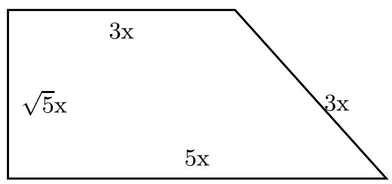
Ejemplo:

$3x^2 - 10x + 4 = 0$;

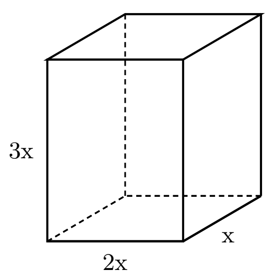
$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \dfrac{10 \pm \sqrt{52}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{10+\sqrt{52}}{6} = 2'86 \\ x_2 = \frac{10-\sqrt{52}}{6} = 0'46 \end{cases}$

Problemas de polinomios

1. Expresar en función de x el perímetro y el área la figura:



2. Escribir en función de x a) el área del cuerpo geométrico; b) el volumen del cuerpo geométrico; d) la longitud de la suma de las aristas.



3. Dados los polinomios $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$,

   $g(x) = 5x^3 + 7x^2 - 5x + 21$

   a) Hallar la suma $f(x) + g(x)$

   b) Hallar la resta $f(x) - g(x)$

4. Efectuar los siguientes productos:

   a) $(3x^5 + 7x)x^2$

   b) $5x^3(8x^4 - 6x^3 + 7x - 8)$

   c) $(6x^2 + 5x)(7x - 5)$

   d) $(5x^4 - 3x^2 + 1)(x^2 - 3x)$

5. Dados los polinomios

   $f(x) = 4x^2 + 8, \quad g(x) = 5x^3 - 5x$, efectuar las siguientes operaciones:

   a) $f(x) - g(x)$

   b) $f(x) \cdot g(x) - f(x)$

6. Calcular $(x + 5)^2 =$

7. Calcular $(2x - 3)^2 =$

8. Utilizando las identidades notables efectuar:

   a) $(3 + x)^2$;

   b) $(x^3 - 5x)^2$;

   c) $(x^3 + 5x)(x^3 - 5x)$;

   d) $(x^2 - 5x)(x^2 + 5x) - (x^2 - 5x)^2$

9. Utilizando las identidades notables efectuar:

   a) $(3 + \sqrt{7})^2$;

   b) $(x^3 - 5\sqrt{7})^2$;

   c) $(x^3 + 5\sqrt{7})(x^3 - 5\sqrt{7})$;

   d) $(x^2 - 5\sqrt{7})(x^2 + 5\sqrt{7}) - (x^2 - 5\sqrt{7})^2$

10. Siendo $f = 3x^2 - x, \quad g = 3x^4 - x^2$, hallar

    a) $f + g$.

    b)$f.g$

11. Multiplicar en línea

    a) $(3x^2 - 2x)(1 - x)$

    b) $(5x^2 - 2x^3)(3x^3 + 2x)$

    Solución: a)$-3x^3 + 5x^2 - 2x$

    b) $-6x^6 + 15x^5 - 4x^4 + 10x^3$

12. Efectuar: $\dfrac{2x + 3}{x - 1} - \dfrac{x}{2} =$

13. Efectuar: $\dfrac{5x}{3 + x} - \dfrac{2}{x - 1} =$

14. Efectuar: $\dfrac{3x}{5}.\dfrac{1 - x}{2x^2 - 3x} =$

15. Efectuar: $\dfrac{\frac{6x}{x^2+1}}{\frac{5x-1}{x-1}} =$

16. Efectuar: $\dfrac{3x}{2x + 5} - \dfrac{2}{7x} =$

17. Efectuar: $\dfrac{2x}{x + 1} - \dfrac{5}{x - 1} =$

18. Efectuar: $(5x^4 + 2x^3) : (x^2 - 3x)$

19. Efectuar: $(6x^5 - x^3 + x^2) : (2x^4 - x)$

    Solución: Q $= 3x$, R $= -x^3 + 4x^2$

20. Efectuar $(4x^6 - 2x^4 + x) : (2x^4 + x^3)$

21. Dividir $(5x^3 - 2x^2 + 3) : (x^2 - 3) =$

    Solución: $Q = 5x - 2, R = 15x - 3$

22. Dividir $3x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3x) : (x - 2) =$

23. Dividir por Ruffini

    $(3x^8 - 5x^2 + 7x) : (x + 1) =$

    Solución: $Q = 3x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 9, R = -9$

24. Dividir por Ruffini

    $(2x^5 - 3x^2 + 3) : (x - 2) =$

25. Siendo $f(x) = 4x^2 - 2x^3$, hallar $f(4)$, $f(-1)$, $f(2)$ y $f(0)$.

    Solución:

26. Dado el polinomio $f(x) = 5x^4 - 7x^2 + 1$.

    Hallar: a) $f(2)$; b) $f(3)$; c) $f(-2)$; d) $f(-1)$; e) $f(0)$

27. Resolver:

    $3x^2 - 6 = 0$

28. Resolver: $x^2 = 24x$

29. Resolver:

    $x^2 + 6 = 5x$

30. Resolver:

    $0 = -x^2 - 5x - 6$

31. Resolver:

    $0 = (x - 3)(1 + x)$

32. Resolver:

    $(x - 3)(5 - x) = 0$

33. Resolver:

    $0 = 4 + x^2$

34. Resolver:

    $x^2 - x + 1 = 0$

35. Resolver:

    $2x^2 - 5x + 3 = 0$

36. Resolver:

    $2x - 3x^2 + 1 = 0$

37. Resolver:

    $3x^2 + x - 14 = 0$

38. En un triángulo rectángulo se sabe que un cateto mide 3m y que la hipotenusa mide 5m ¿Cuánto vale el cateto restante?.

39. La suma de un número más su cuadrado es 90. Hállalo.

40. Hallar dos números cuya suma es 47 y su producto es 280.

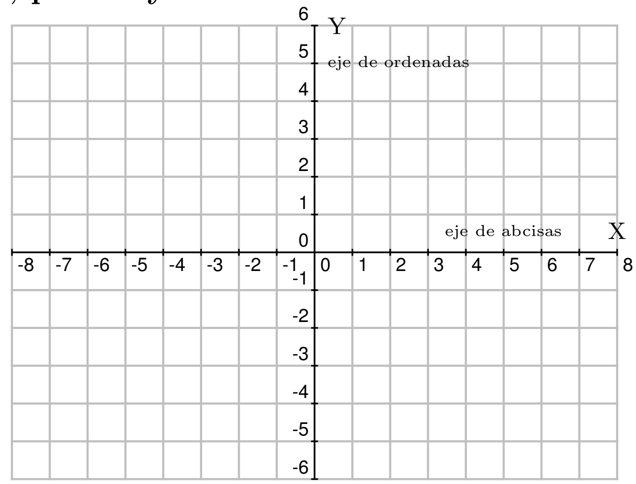
41. Hallar dos números cuya suma es 12 y la de sus cuadrados es 80.

42. El área de un rectángulo es de 40 cm^2. Hallar sus lados sabiendo que uno de ellos es 6 cm más largo que el otro.

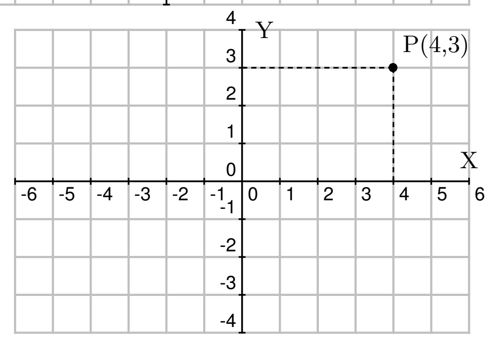
43. Hallar las dimensiones de un rectángulo que tiene 20 m de perímetro y 21 m^2 de área.

5 VECTORES, TRIGONOMETRÍA, RECTAS

5.1 Coordenadas cartesianas en el plano, puntos y vectores



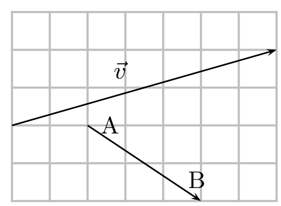
Al eje horizontal se le llama eje de **abcisas X** y al vertical eje de **ordenadas Y**.
Se llaman **ejes de coordenadas** a dos rectas perpendiculares con divisiones.
Sirven para situar objetos en un plano, como los crucigramas. o el juego de los barcos.



Coordenadas de un punto Con dos números situamos un punto en los ejes del plano.

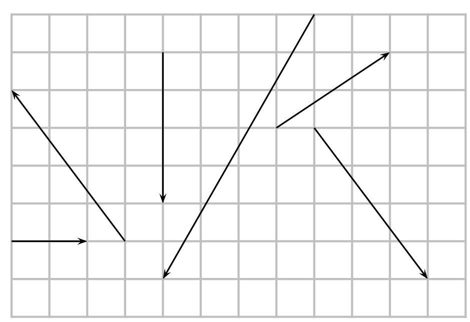
Los dos números que determinan la posición de un punto se llaman **coordenadas** del punto.

Los puntos se suelen representar con una letra mayúscula.



Vector Un **vector** es un segmento orientado: tiene un origen y un extremo. Consideramos que se puede poner en cualquier sitio del plano conservando la dirección y el sentido.

Los vectores se suelen representar con una flecha encima de la letra, en el ejemplo: $\vec{v} = (7, 2)$; $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$.

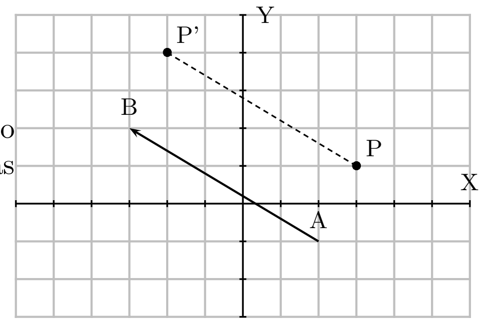


Un vector queda determinado con dos coordenadas, la horizontal y la vertical.

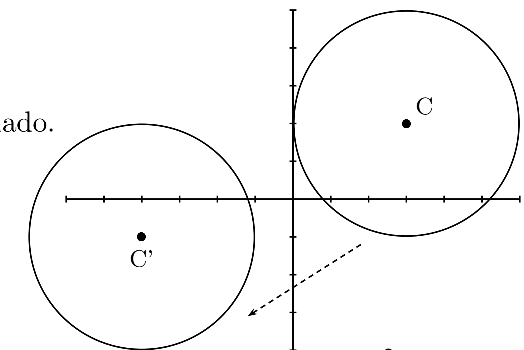
Ejercicio Dar las coordenadas de los vectores de la figura.

Ejemplos:

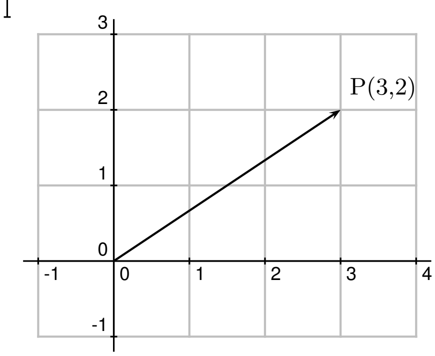
- Dados los puntos $A(2,-1), B(-3,2)$.
  I) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
  II) Se aplica la traslación de vector $\vec{v}$ al punto $P(3,1)$ para trasladarlo, hallar las coordenadas del punto trasladado.
  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-5,3)$
  $P' = (-2,4)$



- La circunferencia del dibujo se ha trasladado. Hallar el vector de la traslación.
  $\vec{v} = \overrightarrow{CC'} = (-7,-3)$



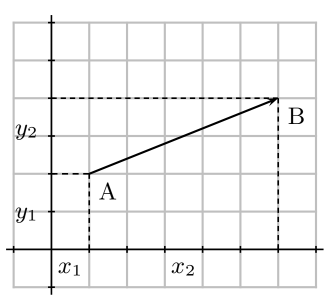
5.2 Vectores libres del plano.

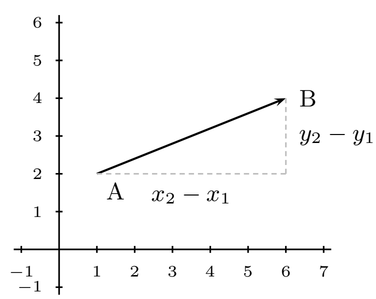


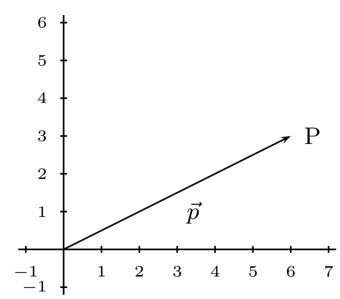
Hemos visto que un **vector** es un segmento orientado: tiene un origen y un extremo; y hemos consideramos que se puede poner en cualquier sitio del plano conservando la dirección y el sentido.
Un vector queda determinado con dos coordenadas, la horizontal y la vertical. Es decir un par ordenado de números reales, por ejemplo (3,2), en general representaremos un vector por:

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \text{ con } a_i \in R$$

Dado un par de puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ queda determinado un vector $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, es decir las coordenadas del vector son las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.







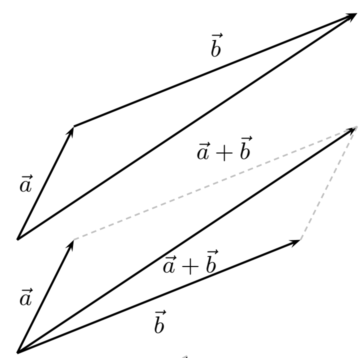
En particular dado un punto $P(x_0, y_0)$, se llama vector de posición del punto P al vector $\vec{OP} = (x_0, y_0)$, se representa por la misma letra del punto minúscula $\vec{p}$.

5.3 Operaciones con vectores

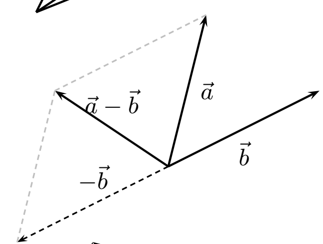
Suma de vectores: se suman componente a componente,
dados: $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$,

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

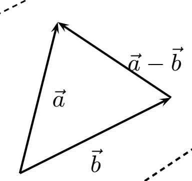
Gráficamente se hace con la diagonal del paralelogramo o poniendo uno a continuación del otro



Restar dos vectores se puede hacer:
a) Sumando el opuesto del sustraendo
b) Haciendo la otra diagonal del paralelogramo



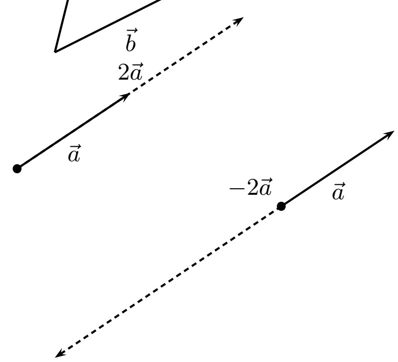
Ejemplo Hallar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, siendo $A(3, -1), B(1, -4), C(6, 5)$
$\overrightarrow{AB} = (1 - 3, -4 + 1) = (-2, -3), \quad \overrightarrow{AC} = (6 - 3, 5 + 1) = (3, 6)$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-2, -3) + (3, 6) = (1, 3)$



Producto de un escalar por un vector: se multiplica cada componente sean: $\alpha \in R, \vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\alpha.\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2)$$

Gráficamente se hace llevando el vector $\vec{a}$ $''\alpha''$ veces, y se obtiene un vector de igual dirección, con el mismo sentido si α es positivo y sentido contrario si α es negativo. Es decir, cuando se multiplica un vector por un número se obtiene un vector paralelo.



Ejemplo Hallar $2\vec{a} - 3\vec{b}$ siendo $\vec{a} = (4, -5), \vec{b} = (-1, 2)$

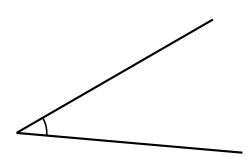
$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(4, -5) - 3(-1, 2) = (8, -10) - (-3, 6) = (11, -6)$$

Observación Dos vectores tienen **igual dirección** cuando uno de ellos es igual al otro multiplicado por un número. Esto se traduce en que sus coordenadas son **proporcionales**:

$$\vec{v} = (2, -4), \vec{w} = (-3, 6), \quad \frac{2}{-3} = \frac{-4}{6} \text{ son proporcionales y resulta que: } \vec{w} = \frac{-3}{2}\vec{v}$$

5.4 Ángulos. Medida de ángulos

Ángulo es la parte de plano limitada por dos semirrectas de origen común.
Arco circular es la porción de circunferencia limitada por dos puntos.
La medida de un ángulo se hace a partir del arco de circunferencia, con centro en el vértice, limitado por los lados. Para medir arcos se emplean las medidas siguientes:



Grado sexagesimal: Dos diámetros perpendiculares determinan en la circunferencia cuatro arcos iguales llamados cuadrantes. Los ángulos correspondientes se llaman rectos. Por definición se dice que un ángulo recto mide 90^0.

1 ángulo recto $= 90^0$
1 grado $= 60'$
1 minuto $= 60''$

Ejemplo: Pasar a grados y minutos $87'34^0$
$87'34^0$ pasamos la parte decimal a minutos $0'34^0 = 0'34 \times 60 = 20'4 \approx 20'$, $\quad 87'34^0 = 87^0 20'$

Radián: En una circunferencia de radio 1 el arco de longitud 1 se llama radián.
La circunferencia entera mide en radianes 2π.
Media circunferencia mide en radianes π. Es decir π es la mitad de la longitud de la circunferencia de radio uno que equivale a 180^0.

Paso de grados a radianes: se hace una regla de tres

$$\begin{array}{r} 180^0 - \pi \\ 30^0 - x \end{array} \qquad x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}, \quad 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

Medida relativa de ángulos: Llamaremos sentido positivo de medida de ángulos al contrario de las agujas del reloj y negativo al otro.

Arco generalizado: Hablaremos de arcos mayores o menores de una circunferencia apoyándonos en la idea de giro, así un arco de 780^0 es dar dos vueltas completas en sentido positivo y 60^0 más.
Arco reducido al primer giro de un arco generalizado es el arco menor que una vuelta pero con los mismos extremos:

arco reducido de $800^0 = 80^0$
arco reducido de $-800^0 = -80^0$ o también: 280^0

El arco reducido al primer giro de -490^0 es igual a -130^0 o 230^0. En la práctica no se acostumbra a usar arcos reducidos negativos de número mayor que 90.

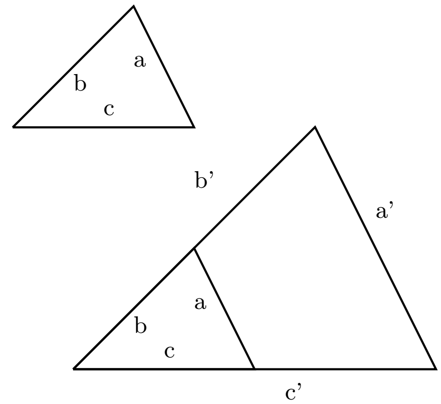
5.5 Semejanza

Dos figuras son semejantes cuando una es la ampliación o reducción de la otra. Por tanto tienen la misma forma y distinto tamaño. Y se pueden encajar una dentro de la otra.

Dos figuras o cuerpos **semejantes** tienen sus dimensiones proporcionales, por ejemplo los lados son el triple o la mitad etc. Eso se hace al ampliar o reducir fotocopias o al hacer una maqueta o un plano.

En dos figuras semejantes los ángulos correspondientes son iguales.

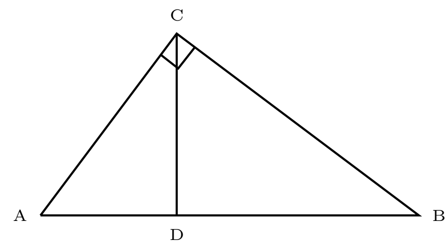
Teorema de Thales Dos triángulos semejantes se pueden poner uno dentro del otro de modo que dos lados coincidan, entonces se dice que están en posición de Thales.



En dos triángulos semejantes los lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

ese cociente constante k entre dos lados correspondientes se llama **razón de semejanza**



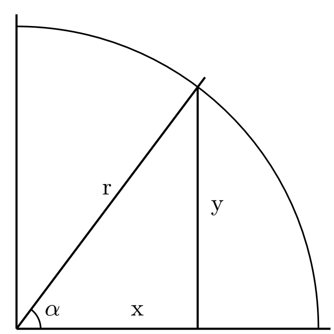
Ejercicio :
Partiendo de que dos triángulos con dos ángulos iguales son semejantes:
a) Comprobar que los tres triángulos rectángulos del dibujo son semejantes.
b) Hallar la razón de semejanza.

En dos figuras semejantes el cociente de dos longitudes correspondientes es la **razón de semejanza** : $\frac{\text{longitud'}}{\text{longitud}} = k$. Por ejemplo los perímetros.

Por eso: el cociente de los perímetros es la razón de semejanza, el cociente de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza y el cociente de los volúmenes es el cubo de la razón de semejanza.

En consecuencia en el Sistema Métrico Decimal como las medidas de longitud varían de diez en diez, las medidas de superficie van de cien en cien

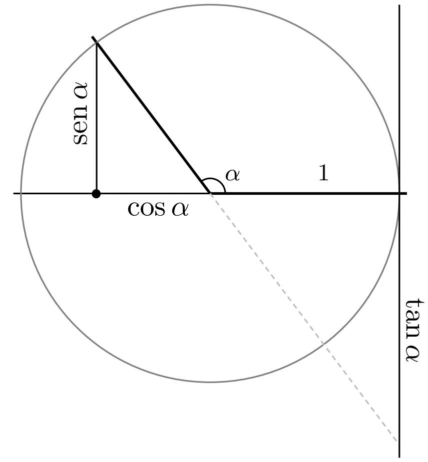
5.6 Razones trigonométricas



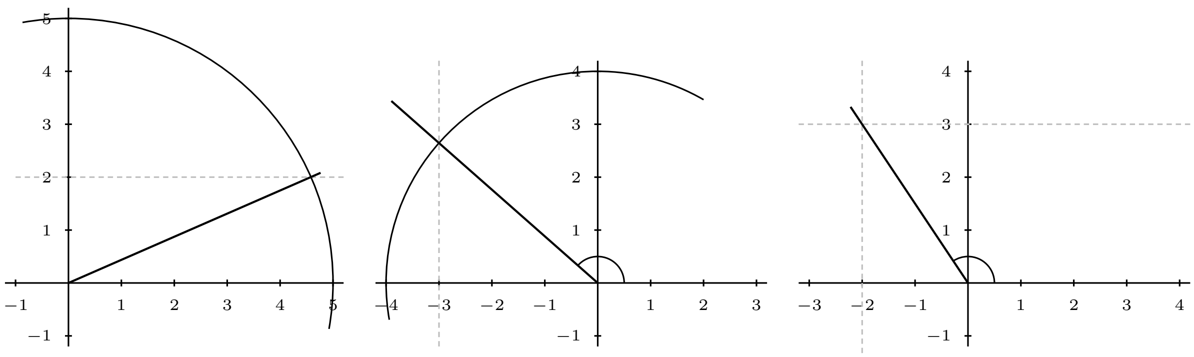
Dado un ángulo, si lo situamos en unos ejes coordenados como se indica en la figura y pintamos una circunferencia cualquiera con centro en el origen, a partir de las coordenadas del punto donde el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia definimos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Si astutamente tomamos la circunferencia con radio 1, queda que el seno es la ordenada y y el coseno la abcisa x del punto donde el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia . La tangente queda en la "recta de tangentes".



Ejemplo Construir los ángulos menores de 180^0 que tienen respectivamente: a) $\operatorname{sen} A = 2/5$; b) $\cos B = -3/4$; c) $\tan C = -3/2$

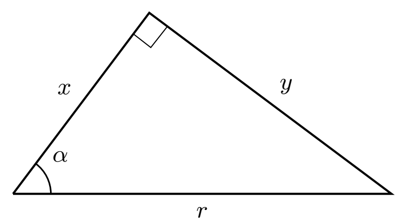


Para ángulos agudos (menores de 90^0) situados en un triángulo rectángulo, se tienen:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$



5.7 Ecuaciones de la recta

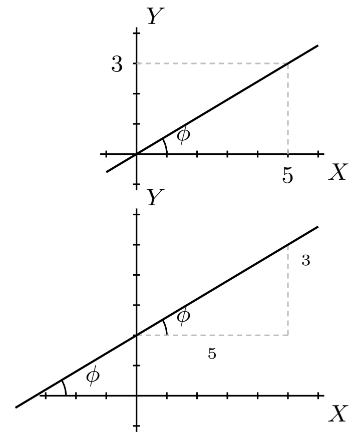
La ecuación de una recta se puede dar de varias formas:

Ejemplo: $y = 5x - 7$, se tiene: $\boxed{y = mx + n}$, **ecuación explícita**. Se caracteriza por estar despejada la y.

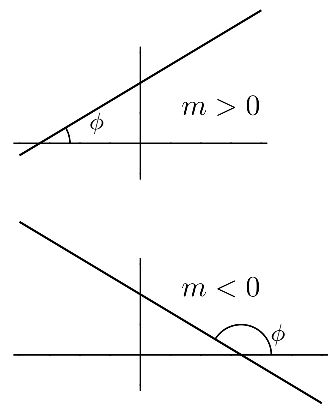
Ejemplo: $5x - y - 7 = 0$, es la misma recta de antes, se tiene: $\boxed{r : Ax + By + C = 0}$, **ecuación general de la recta**. Se caracteriza por que el segundo miembro es 0

Ejemplo Si en la ecuación explícita de la recta: $y = \dfrac{3}{5}x + 2$ quitamos denominadores y pasamos todo al primer miembro resulta: $3x - 5y + 10 = 0$ que es la ecuación general de la misma recta.

Pendiente de una recta, rectas paralelas Si consideramos la recta $y = \frac{3}{5}x$, en la gráfica vemos que el coeficiente de x : $\quad m = \frac{3}{5}$ es la tangente del ángulo ϕ que forma con la horizontal.
La recta $y = \frac{3}{5}x + 2$ es la anterior subida 2 unidades hacia arriba.
El coeficiente de x sigue siendo el mismo $m = \frac{3}{5} = \tan\phi$ se llama pendiente de la recta.
Luego en general: En la ecuación explícita $y = mx + n$, el coeficiente de x **m** se llama **pendiente** de la recta, además $m = \tan\phi$ es la tangente del ángulo que forma con la horizontal "OX".
Resumiendo:



Cuando la y está despejada, el coeficiente de x es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal positiva.



Por tanto según que la pendiente sea positiva o negativa la recta es creciente o decreciente.
Por otro lado se tiene que n es la ordenada en el origen.
Dos rectas paralelas tienen igual pendiente.

Ejemplo Hallar la recta paralela a $y = \frac{3}{5}x + 2$ que pasa por el punto $(4, 6)$

La recta que busco será $y = \frac{3}{5}x + n$

Haciendo que pase por el punto $(4, 6)$ resulta: $6 = \frac{3}{5}4 + n, \quad n = \frac{18}{5}$, luego la recta paralela buscada es $y = \frac{3}{5}x + \frac{18}{5}$

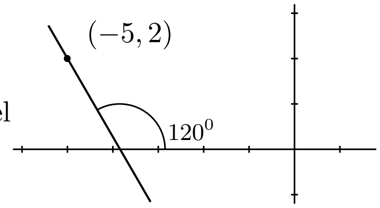
En la ecuación general los coeficientes de x e y son los que determinan la pendiente, por tanto:
Dos rectas en forma general con los mismos coeficientes de x e y son paralelas.

Ejemplo Hallar el ángulo que forma con el eje de las "x"positivas la recta $4x + 7y + 5 = 0$

Despejando y resulta $y = \frac{-4}{7}x + \ldots$, luego la pendiente es $m = \frac{-4}{7} = \tan\phi$, con la calculadora resulta $\phi : ar\tan(\frac{-4}{7}) = -29'7^0$, restando de 180^0 se obtiene $\phi = 180^0 - 29'7^0 = 150'3^0$

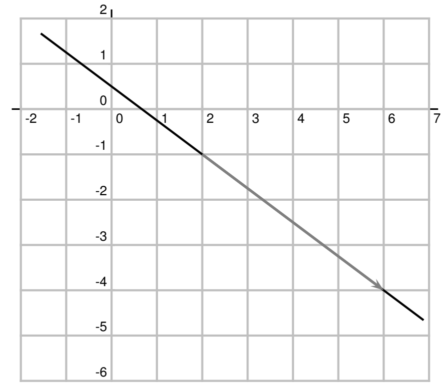
Ejemplo Hallar la recta paralela a $2x - 3y = 7$ que pasa por el punto $(0, 4)$.
Si es paralela los coeficientes de x, y pueden ser los mismos: $2x - 3y + C = 0$
Haciendo que pase por el punto: $-3.4 + C = 0; \quad C = 12$, luego la recta buscada es $2x - 3y + 12 = 0$

También se usa la siguiente ecuación de la recta:
$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ **ecuación punto pendiente**, en la que (x_0, y_0) son las coordenadas de un punto



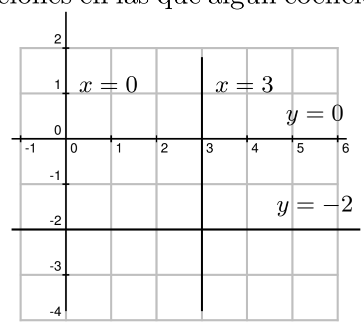
Ejemplo Hallar la recta que pasa por el punto $(-5, 2)$ y forma con el eje de las "x"positivas un ángulo de 120^0.

A partir del dibujo: $m = \tan 120^0 = -1'73$
podemos escribir ya la ecuación punto pendiente: $y - 2 = -1'73(x + 5)$



Ejemplo Hallar la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $(4, -3)$. Escribir sus ecuaciones explícita y general.
A partir del dibujo: $m = \tan \phi = \dfrac{-3}{4}$
podemos escribir ya la ecuación punto pendiente: $y + 1 = \dfrac{-3}{4}(x - 2)$
despejando y tenemos la explícita $y = \dfrac{-3}{4}x + \dfrac{1}{2}$
operando para ponerlo todo en el primer miembro y quitando denominadores hallamos la ecuación general: $3x + 4y - 2 = 0$

Rectas paralelas a los ejes Por su posición especial tienen ecuaciones en las que algún coeficiente es cero y no aparece:



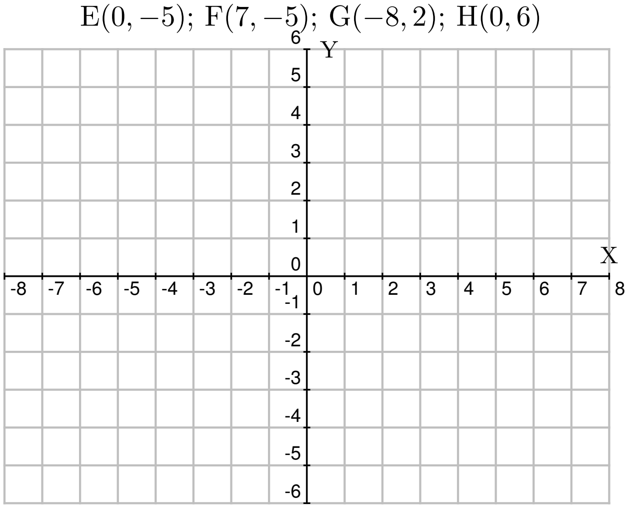
recta vertical: $x = 3$

recta horizontal: $y = -2$

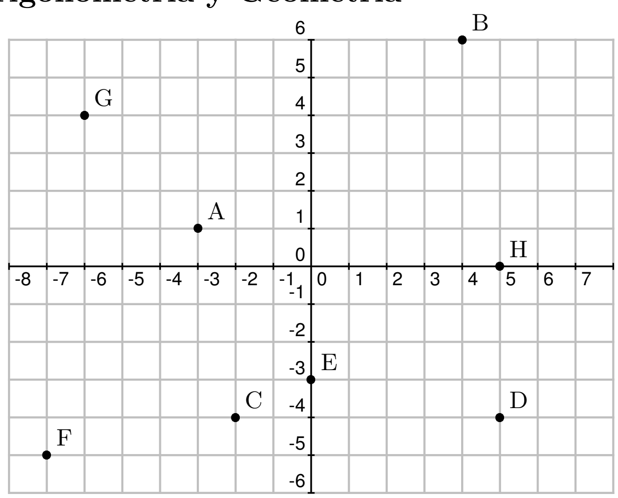
la recta $x = 0$ es el eje de ordenadas.

Problemas de vectores en el plano, Trigonometría y Geometría

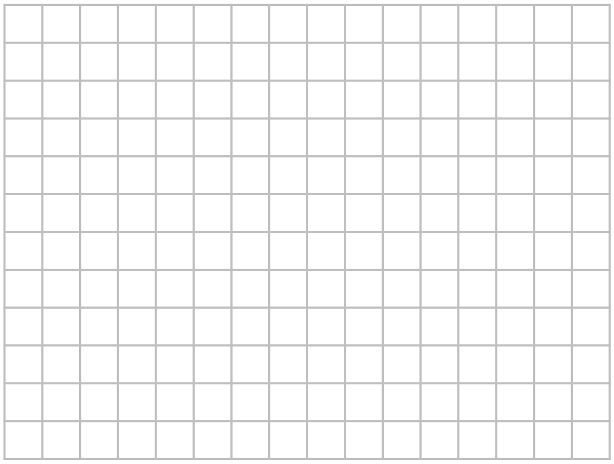
1. Representar los puntos de coordenadas: A$(4, 3)$; B$(5, -3)$; C$(-6, 5)$; D$(-3, -1)$; E$(0, -5)$; F$(7, -5)$; G$(-8, 2)$; H$(0, 6)$



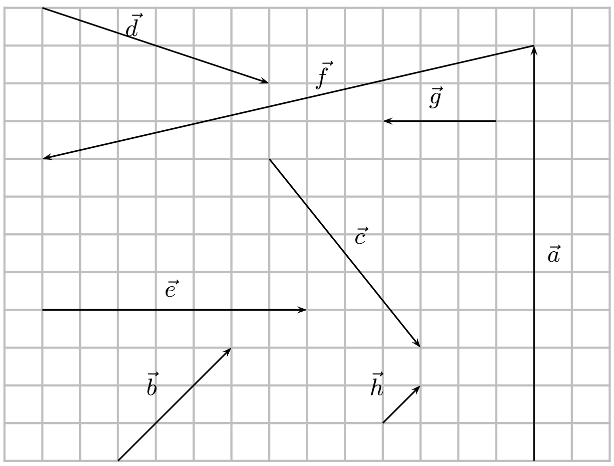
2. Escribir las coordenadas de los puntos representados:



3. Representar los vectores de coordenadas: $\vec{a} = (4, 3)$; $\vec{b} = (5, -3)$; $\vec{c} = (-6, 5)$; $\vec{d} = (-3, -1)$; $\vec{e} = (0, -5)$



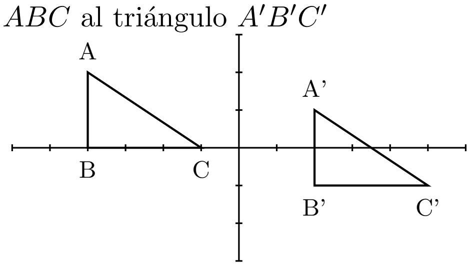
4. Escribir las coordenadas de los vectores representados:



5. Hallar y dibujar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ siendo $A(3,2), B(7,5), C(-3,1), D(4,-2)$.

6. Dados los puntos $A(3,-2), B(-5,4), C(7,2)$, $D(6,-3)$. Dibujar y hallar las coordenadas de $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}$

7. Hallar el vector que traslada el triángulo ABC al triángulo $A'B'C'$



8. Hallar la distancia entre los puntos $A(-5,2), B(4,-3)$

   Solución: 10'29

9. El triángulo de vértices $A(3,2), B(5,-3)$, $C(8,5)$ se traslada. Si B pasa a $B'(-7,1)$. Hallar A' y C'.

10. Dados $\vec{a} = (6,8)$, $\vec{b} = (2,-3)$. Hallar $\vec{a}+\vec{b}$ 1) analíticamente; 2) Gráficamente.

11. Dados $\vec{v} = (3,2)$, $\vec{w} = (-4,1)$. Hallar $\vec{v}+\vec{w}$ 1) analíticamente; 2) Gráficamente.

12. Dados $\vec{a} = (4,-2)$, $\vec{b} = (3,5)$, $\vec{c} = (-1,1)$. Hallar $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 1) analíticamente; 2) Gráficamente.

13. Dados los puntos $A(2,-1), B(-1,4)$.

    1) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

    2) Se aplica el vector. $\vec{v}$ al punto $X(3,2)$ para trasladarlo, hallar las coordenadas del punto trasladado. Hacer dibujo.

14. Hallar $\vec{a} + 2\vec{b}$ siendo $\vec{a} = (3,1)$, $\vec{b} = (-2,5)$. Hacer dibujo.

15. Hallar las coordenadas de Q sabiendo que $A(3,2), B(5,8)$ y $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AB}$

16. Calcular t para que los vectores $\vec{a}$ = (3,2), $\vec{b}$ = (1,t) sean paralelos.

    Solución: $t = 2/3$

17. Hallar las coordenadas del punto D para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo, sabiendo que $A(3,1), B(4,7), C(6,2)$.

    Solución: $\vec{AB} = \vec{DC}, D(5,-4)$

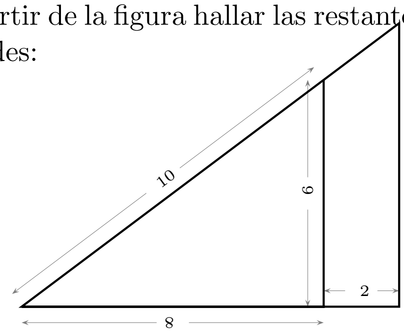
18. Sabiendo que $A(3,2), B(5,1), C(1,-2)$, hallar las coordenadas de D siendo: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

19. Hallar las coordenadas de Q sabiendo que: $A(4,2), B(-1,3)$ y que $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AB}$

20. Sabiendo que $A(2,-3), B(1,2), C(-2,-1)$, hallar las coordenadas de D siendo: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

21. a) Poner en grados y minutos $62'38^0$. b) Pasar a radianes 228^0. c) Pasar a grados 3'5 radianes, d) Pasar a grados $\frac{3\pi}{2}$ radianes

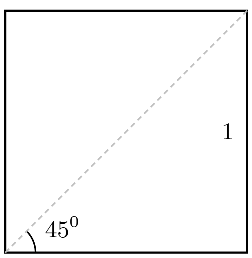
22. A partir de la figura hallar las restantes longitudes:

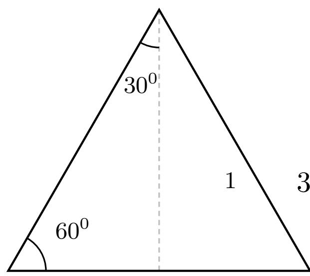


Solución: 12'5,7'5

23. Construir los ángulos correspondientes: a) $\operatorname{sen} A = 3/4$; b) $\cos B = 6/7$; c) $\tan C = 3$

24. A partir de la figura hallar $\operatorname{sen}, \cos, \tan$ de los siguientes ángulos: a) 45^0, b) 30^0, c) 60^0





25. Construir los ángulos entre 0^0 y 180^0 que cumplen:

    a) $\operatorname{sen} A = -\frac{3}{5}$, b) $\cos B = \frac{3}{4}$, c) $\tan C = \frac{5}{2}$

26. inscribir un triángulo equilátero en un círculo de radio 2.

27. Representar

    a) $y = \dfrac{x}{2} + 3$

    b) $6x + 5y - 13 = 0$

28. a) Poner en forma explícita $2x + 8y - 15$,

    b) Poner en forma general $y = \dfrac{5}{4}x - 7$

29. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $12x - y + 7 = 0$

    Solución: $12x - y - 10 = 0$

30. Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto (-2,-4) y es paralela a la recta $y = \dfrac{-4}{7}x + 4$.

    Solución: $y = \frac{-4}{7}x - \frac{36}{7}$

31. Hallar el ángulo que forma con el eje de las "x"positivas la recta $2x - 5y + 3 = 0$

32. Hallar m y n en las ecuaciones mx + 2y = 6, nx - 7y = 9 sabiendo que las rectas que representan son paralelas y la primera pasa por el punto del eje OX que dista 3 unidades del origen.

    Solución: $m = 2, n = -7$

33. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-1) y es paralela a la recta 3x + 2y = 1,

    Solución: $3x + 2y - 1 = 0$

34. Se consideran las rectas $r : x - y + 1 = 0, \quad s : x - 2y + 3 = 0$ Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

    Solución: $P(1, 2)$

35. Hallar la recta que forma un ángulo de 30^0 con el eje de las ordenadas positivas y pasa por el punto $(3, 1)$

    Solución: $y - 1 = 1'73(x - 3)$

36. Hallar el ángulo A sabiendo que $\cos A = -2/5$ y que A está en el tercer cuadrante.

    Solución: $A = 246'42^0$

37. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(4, 6)$

    Solución: $0'5x - y + 4 = 0$

38. ¿Qué ecuación explícita tiene una recta que pasa por el punto (-3,1) y cuya pendiente es 4?

    Solución: $y = 4x + 13$

39. Escribe la ecuación punto pendiente de la recta que pasa por $A(-4, 1), B(1, 2)$

    Solución: $y - 2 = \frac{1}{5}(x - 1)$

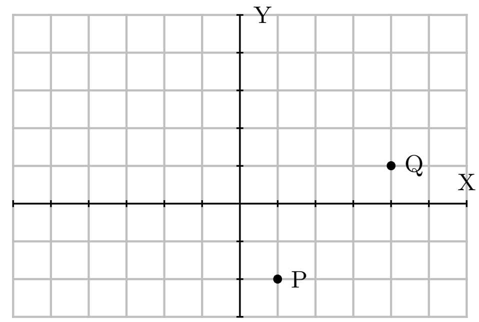
40. Una recta pasa por $P(0, 2), Q(3, 0)$. ¿Es paralela a otra de pendiente 2/3?

    Solución: 2/3 y -2/3, no son paralelas

41. Hallar la pendiente y la ecuación explícita de una recta de ecuación $4x + 3y - 12 = 0$. Dibujarla a partir de sus puntos de corte con los ejes de coordenadas. Hallar el ángulo que forma con la horizontal positiva.

    Solución: $y = -\frac{4}{3}x + 4, \phi = 126'87^0$

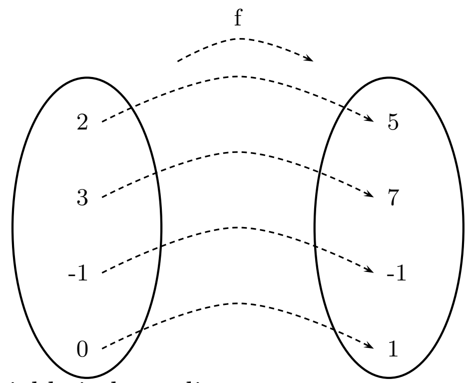
42. Hallar la ecuación general de la recta del dibujo:



Solución: $x - y - 3 = 0$

6 FUNCIONES

6.1 Función



Una función transforma números en números,

Ejemplo

$$\begin{array}{ll} f: & R \longrightarrow R \\ & x \longrightarrow f(x) = 2x + 1 \end{array}$$

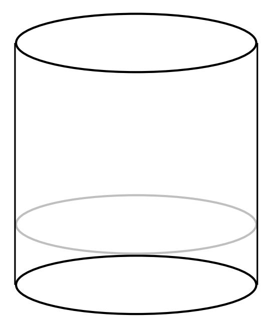
Esta función de los números reales en los números reales le asocia a cada número su doble más uno.

En general una función se representa : $y = f(x)$

x es un elemento cualquiera del conjunto original, se llama variable independiente;

y representa su correspondiente imagen en el conjunto final, se llama variable dependiente.

Al conjunto de valores que toma x se le llama **dominio** D , es un subconjunto del conjunto original, si no se especifica, es el mayor posible.



Ejemplo Se tiene un depósito cilíndrico de agua de diámetro 10 m y altura 14 m.
Expresar el volumen de agua en función de la altura h del agua en el depósito.

Solución:
Volumen cilindro = área de la base $\times$ altura

$V = \pi.r^2.h = \pi.25.h \approx 3'14.25.h = 78'5.h \quad m^3$

El dominio de esta función es el intervalo desde 0 hasta 14.

6.2 Gráfica de una función

Dada una función $y = f(x)$, los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ representan puntos del plano, el conjunto de ellos es la gráfica de la función.

Ejercicios:

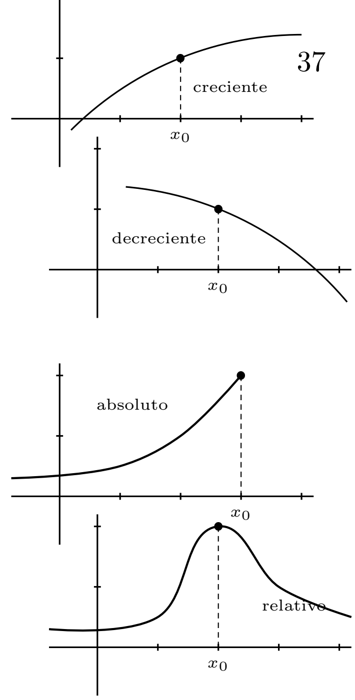
- Sea x el número de kg de limones, sea y el precio total de los limones. Sabiendo que un kg de limones vale 1'3 euros

  a) Construir una tabla que refleje el precio en función de los kg de limones.

  b) Hacer la gráfica refleje el precio en función de los kg de limones.

  c) Dar la fórmula que permite calcular el precio en función de los kg de limones.

- Representar $y = 2x + 3$



6.3 Función creciente, decreciente, máximos y mínimos

Una función es **creciente** cuando al aumentar la x entonces aumenta la y. Gráfica hacia arriba.

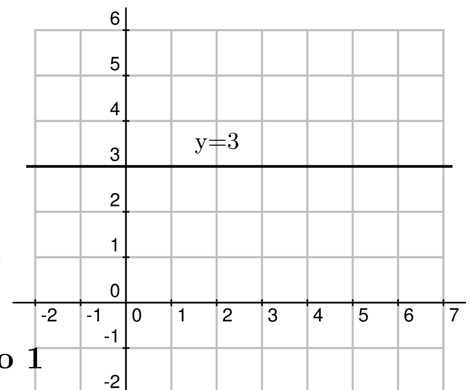
Una función es **decreciente** cuando al aumentar la x entonces disminuye la y. Gráfica hacia abajo.

Una función tiene un **máximo absoluto** en un punto x_0, si en ese punto toma el mayor valor.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto x_0, si en ese punto toma mayor valor que en los puntos de alrededor.

Análogo sería para **mínimo absoluto** y **mínimo relativo**.

6.4 Gráfica de una función polinómica de grado 0



Sea por ejemplo $y = 3$

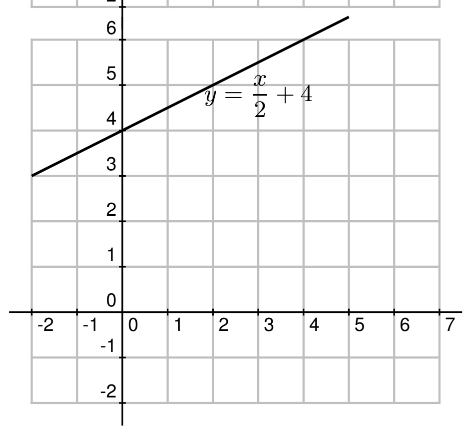
(podemos pensar en $y = 3 + 0x$)

x	0	1	2	3
y	3	3	3	3

La gráfica de una función polinómica de grado cero, o sea, y = constante, es una recta paralela al eje de abcisas

De manera parecida la representación de $x = -5$ será una recta vertical

6.5 Gráfica de una función polinómica de grado 1



La gráfica de una función polinómica de grado 1, o sea, $y = ax + b$, es una recta que se determina hallando únicamente dos puntos.

Ejemplo: $y = \dfrac{x}{2} + 4$

x	0	4
y	4	6

6.6 Gráfica de una función polinómica de grado 2

La gráfica de una función polinómica de grado 2, o sea, $y = ax^2 + bx + c$, es una parábola.

Para representarla hacemos los siguientes pasos:

1. si el coeficiente de x^2 es positivo es abierta hacia arriba $\bigcup$

   si el coeficiente de x^2 es negativo es abierta hacia abajo $\bigcap$

2. hallamos los puntos de corte con los ejes

con el eje OX se hace $y = 0$ y se resuelve la ecuación de 2^0 grado

con el eje OY se hace $x = 0$

3. hallamos el vértice: la abcisa del vértice viene dada por $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, para hallar y_v sustituimos x_v en la función

4. si tenemos pocos puntos para representar hallamos alguno más dando valores a la x.

Ejemplos:

1. $y = x^2 - 4x$

   1) abierta hacia arriba

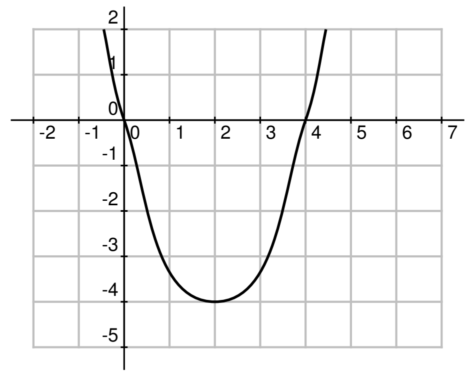
   2) cortes con los ejes

   con OX, $\quad y = 0$, resulta: $0 = x^2 - 4 = x(x-4)$ $\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{array}$

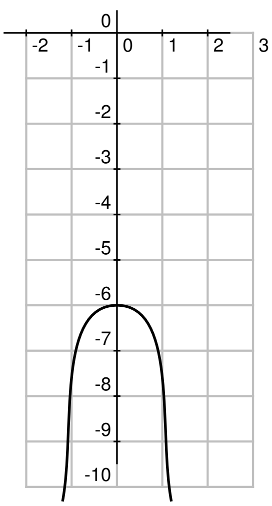
   con OY, $\quad x = 0$, ya hallado.

   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2, \quad y_v = -4$

	x	y
	0	0
	4	0
vértice	2	-4



2. $y = -3x^2 - 6$



1) abierta hacia abajo

2) cortes con los ejes

con OX, $\quad y = 0$, $\quad 0 = -3x^2 - 6$ que no da raíces reales

con OY, $\quad x = 0$, $\quad y = -6$

3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{6} = 0, \quad y_v = -6$

interesa dar más valores:

	x	y
vértice	0	-6
	1	-9
	-1	9

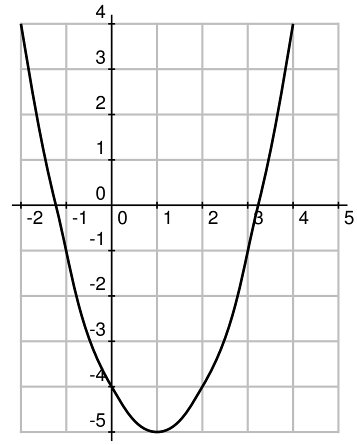
3. $f(x) = x^2 - 2x - 4$

1) abierta hacia arriba
2) Cortes con los ejes
$y = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.(-4)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} \approx \begin{array}{r} 3'23 \\ -1'23 \end{array}$$

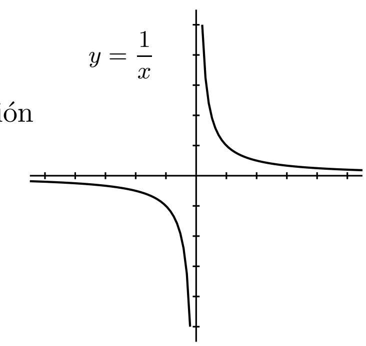
3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

	x	y
	$3'23$	0
	$-1'23$	0
vértice	1	-5
	0	-4
	-2	4



6.7 Función de proporcionalidad inversa

Ejercicio: Dado un triángulo de 6 cm^2 de área, representar la función $y = f(x)$ donde x es la base e y es la altura.



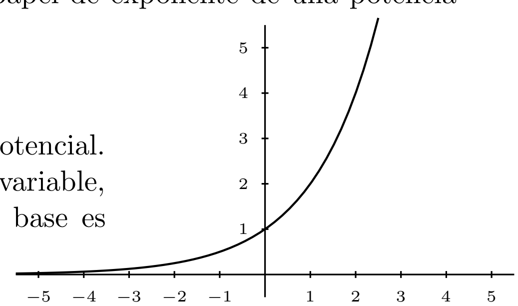
La función de proporcionalidad inversa es el caso más sencillo de función racional (polinomio/polinomio). Su gráfica es una hipérbola.

Tiene de ecuación $y = \dfrac{k}{x}$

6.8 Función exponencial

Es la función en la que la variable independiente hace el papel de exponente de una potencia cuya base es un número mayor que 0.

Ejemplo: $y = 2^x$



No hay que confundir la función exponencial con la función potencial. En la función exponencial la base es constante y el exponente variable, por ejemplo 2^x, y en la función potencial es al contrario, la base es variable y el exponente constante, por ejemplo x^2.

La función exponencial más famosa es $y = e^x$.

6.9 Funciones definidas a trozos

Ejemplo: $y = \begin{cases} 5 \quad para x \leq 1 \\ x+1 \quad para \quad 1 < x < 2 \\ x^2 - 1 \quad para \quad x \geq 2 \end{cases}$

Se representa cada trozo y se dan los valores de x en los que cambia la expresión de la función:

$y = x + 1$ recta

x	1	2
y	2	3

$y = x^2 - 1$ parábola

x	2	3
y	3	8

Problemas de funciones

1. Aqualia cobra de canon 5'7 euros y luego 3 euros cada m^3 de agua. Hallar la gráfica del importe en función del consumo.

2. Alquilar un coche cuesta 15 euros fijos y 25 céntimos por km recorrido. El consumo por cada 100 km es de 5 litros de diesel que cuesta 80 céntimos el litro. Dibuja una gráfica que refleje el gasto en euros según los kms recorridos.

3. Representar gráficamente

   $3x - y = 2$

4. Representar gráficamente

   $4x - 5y - 24 = 0$

5. Representar gráficamente

   $y = \frac{1}{4}x^2 - 16$

6. Representar gráficamente

   $y = -x^2 - 5x - 6$

7. Representar gráficamente

   $y = (x-3)(1+x)$

8. Representar gráficamente

   $y = (x-3)(5-x)$

9. Representar gráficamente

   $y = 4 + x^2$

10. Representar gráficamente

    $y = \begin{cases} x+1 & para \quad x < 2 \\ -x+2 & para \quad x \geq 2 \end{cases}$

11. Representar gráficamente

    $y = \begin{cases} 2x+1 & para \quad x \leq -2 \\ x^2+4x+4 & para \quad x > -2 \end{cases}$

12. Hallar la recta que pasa por los puntos $A(3,-2), B(-5,4)$

13. Representar el conjunto de puntos del plano cuyo de coordenadas producto es 16

14. Representar en unos mismo ejes, con distinto color para comparar, las funciones:

    $y = x, y = x^2, y = \sqrt{x}, y = 2^x$

15. Un taxi cobra 1'5 €por bajada de bandera y luego 1'2 €por cada Km.

    Hacer la gráfica y la fórmula que dé el precio de una carrera en taxi.

16. Una máquina consume 1'38 kw en el segundo que le cuesta arrancar y luego su consumo es 0'28 kw por segundo.

    a) ¿Cuánto consume en una jornada laboral de 8 horas?

    b) Si cada kw/hora vale 1'2 €. ¿Cuántos euros de energía eléctrica cuesta en cada jornada su funcionamiento?

    c) Representar gráficamente la función de consumo de electricidad.

    d) Representar gráficamente la función de coste de funcionamiento.

17. Hacer la tabla de valores para la función valor absoluto $y = |x|$. Hacer la gráfica.

18. Queremos estudiar el tiempo que tardamos en recorrer la distancia entre dos ciudades que distan entre sí 1200 km en función de la velocidad que lleve el medio de transporte que utilicemos, completar la tabla y representar gráficamente.

x	100	200	300	400	600	1200
y						

19. A partir de un folio DIN A4 (297mm×210mm), cortando un cuadrado en cada esquina y doblando se construye una caja abierta.

    a) Hallar el volumen si se ha quitado un cuadrado de lado 3cm.

    b) Expresar el volumen en función del lado x del cuadrado.

    c) Hallar el dominio.

    Solución: a) 1066'5 cm^3, b) $V(x) = 4x^3 - 101'4x^2 + 623'7x$, c) $(0, 10'5)$

20. En una terraza 3 pares de calcetines tardan en secarse 25 minutos.

    a) Cuánto tardarán en secarse 13 pares de calcetines.

    b) Expresar el tiempo de secado en función del número de pares de calcetines puestos a secar.

    c) Representar gráficamente esa funcón.

21. La función $f(x) = \dfrac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$ representa el beneficio expresado en millones de euros que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

    a) Representar gráficamente la función.

    b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

    c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible?

    Solución: b) $20 < x < 80$, c) 50

7 ESTADISTICA

7.1 Introducción

Fenómeno aleatorio es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

Estadística Descriptiva es la parte de las Matemáticas que se ocupa de proporcionar métodos para recoger, organizar, analizar y resumir datos numéricos de fenómenos aleatorios.

Colectivo o población es el conjunto de elementos con caracteres comunes.

Muestra es un subconjunto o parte representativa de un colectivo.

7.2 Variable estadística

Variable estadística es el carácter común que se considera en los elementos del colectivo. Hay dos tipos cuantitativa y cualitativa, según que el carácter sea numérico o no; ej: colectivo: alumnos de un instituto, variable cualitativa color del pelo, variable cuantitativa estatura.

Nos centraremos en las cuantitativas y representaremos por $\{x_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de valores que toma la variable estadística.

Frecuencia de un valor x_i es el número de veces que se presenta, n_i.

Frecuencia relativa de x_i es la frecuencia dividida por el número de elementos, $f_i = \dfrac{n_i}{\Sigma n_i}$

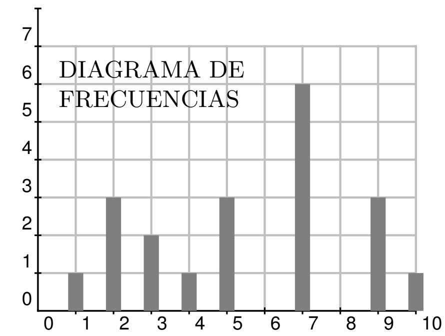
La frecuencia relativa es el tanto por 1, para obtener el porcentaje se multiplica por 100.

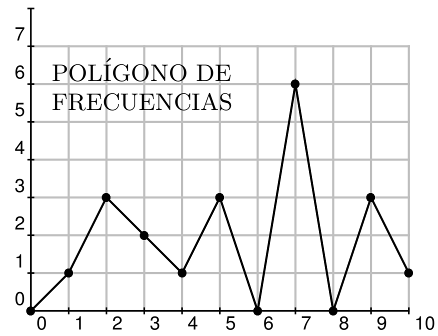
Frecuencia acumulada de x_i es la suma de las frecuencias de x_i y de las anteriores $N_i = \Sigma n_j$ con $j \leq i$, $F_i = \Sigma f_j$ con $j \leq i$.

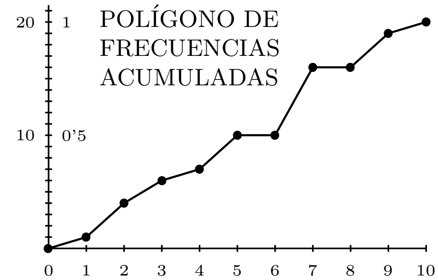
Ejemplo * Supongamos que las calificaciones de 20 alumnos vienen dadas por la serie estadística:

2,4,5,9,9,10,7,3,2,5,7,3,7,7,5,1,2,7,7,9

var.est	frecuencias	frec. rel	frec. acum.	frec .rel. acum.
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	0	0	0	0
1	1	0’05	1	0’05
2	3	0’15	4	0’20
3	2	0’10	6	0’30
4	1	0’05	7	0’35
5	3	0’15	10	0’50
6	0	0	10	0’50
7	6	0’30	16	0’80
8	0	0	16	0’80
9	3	0’15	19	0’95
10	1	0’05	20	1
	$\Sigma n_i = 20$			







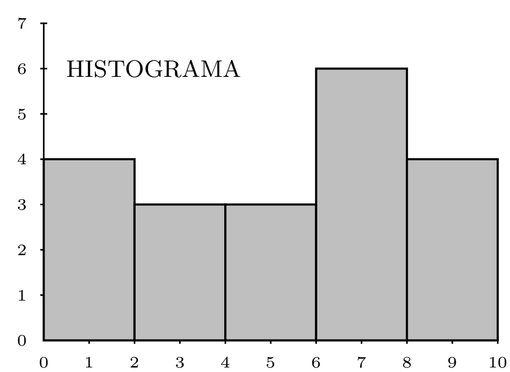
Agrupamiento en clases Si interesa porque hay muchos valores distintos, se suelen agrupar los valores en **intervalos de clase** por ej. las tallas de 5 cm en 5 cm, el centro de cada intervalo se llama **marca de clase** y se considera éste como el valor de la variable estadística.

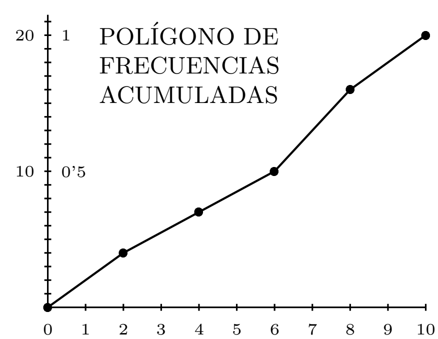
Un criterio para decidir el número de intervalos de clase puede ser el de Norcliffe:

$$\text{n}^0 \text{ de clases} \approx \sqrt{\text{n}^0 \text{ de datos}}$$

En el ejemplo * n^0 clases $\approx \sqrt{20} \approx 5$ intervalos iguales, el intervalo total es 10, la longitud de cada intervalo de clase es $10/5 = 2$

int.clase	marca clase x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
[0,2]	1	4	0'20	4	0'20
(2,4]	3	3	0'15	7	0'35
(4,6]	5	3	0'15	10	0'50
(6,8]	7	6	0'30	16	0'80
(8,10]	9	4	0'20	20	1
	$\Sigma n_i = 20$				





Normalmente interesa dar un resumen numérico de los datos de un fenómeno aleatorio. Para ello se requieren dos números: uno que dé un valor medio representativo y otro que indique lo alejados que están los datos entre sí.

Tenemos entonces las medidas de **centralización** que indican valores medios representativos y las de **dispersión** que indican lo separados que están los datos.

7.3 Medidas de centralización

Se usa el ejemplo* de las notas de clase.

Moda (para datos no agrupados en clases) es el valor de la variable estadística que tiene mayor frecuencia en el ejemplo el 7.

Mediana (para datos no agrupados en clases) es el valor central del conjunto ordenado de datos x_i, el que deja a la izquierda la mitad de los datos. En el ejemplo: 1 2 2 2 3 3 4 5 5 5*7 7 7 7 7 7 9 9 9 10 la mitad está entre $N_i = 10$ y 11, o sea entre 5 y 7, (pasa cuando es par el número de datos) y se toma la semisuma: mediana $= \frac{5+7}{2} = 6$.

Media es la media aritmética: se suman todos los datos y se divide por el número de datos.

$$\boxed{\text{media sin frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}}$$

Si conviene considerar las frecuencias, como cada dato se sumaría un número de veces igual a su frecuencia resulta:

$$\boxed{\text{media con frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i}}$$

se añade una columna a la tabla

en el ejemplo: $\bar{x} = \frac{111}{20} = 5'55$

x_i	n_i	$x_i.n_i$
1	1	1
2	3	6
3	2	6
4	1	4
5	3	15
7	6	42
9	3	27
10	1	10
		$\Sigma x_i n_i = 111$

7.4 Medidas de dispersión

Se usa el ejemplo* de las notas de clase.

Rango o recorrido es la diferencia entre los valores más grande y más pequeño, en el ejemplo: $10 - 1 = 9$.

Desviación media Desviación de un valor respecto de la media es $x_i - \bar{x}$.

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$
1	1	-4,55
2	3	-3,55
3	2	-2,55
4	1	-1,55
5	3	-0,55
7	6	1,45
9	3	3,45
10	1	4,45

Se llama desviación media a la media de los valores absolutos de las desviaciones. Como los valores absolutos se trabajan mal con calculadora en la práctica se usa:

Desviación típica es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, se representa por σ:

$$\boxed{\text{Desviación típica sin frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N}}}$$

$$\boxed{\text{Desviación típica con frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}}}$$

La calculadora nos da para el ejemplo: $\sigma = 2'67$.

Varianza es el cuadrado de la desviación típica, se representa por σ^2

En el ejemplo: $\sigma^2 = 7'15$.

Las dos medidas más importantes son la **media** y la **desviación típica**, y nos dicen que si tomamos un alumno al azar lo más probable es que haya obtenido una nota próxima a 5'55 con una diferencia de $\pm 2'67$.

Pero sobre todo sirve para comparar dos variables; si otro curso tiene como media 6'5 y desviación típica 1'2, podríamos afirmar con total seguridad que estos últimos alumnos han sacado mejores notas y que éstas son más uniformes.

Funciones estadísticas de la calculadora

ACCIÓN	TECLAS	PANTALLA
modo estadístico	MODE .	SD
limpiar memoria	SHIFT AC	
datos sin frecuencias	x_i M+	x_i
datos con frecuencias	x_i X n_i M+	x_i
borrar dato	C	0
media	SHIFT $\bar{x}$	resultado
desviación típica	SHIFT σ_n	resultado
sumatorios, etc	SHIFT tecla	

Ejemplos

1. Calcular la media y la desviación típica de los datos de la tabla adjunta que resume la observación hecha a 30 niños de edad en meses a la que empiezan a andar

MESES	9	10	11	12	13	14	15
FRECUENCIA	1	2	4	13	6	3	1

Introducimos los datos en la calculadora, (las frecuencias son distintas de 1)

MESES	9	10	11	12	13	14	15
FRECUENCIA	1	2	4	13	6	3	1

media $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{364}{30} = 12'13$

desviación típica $= \sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}} = 1'26$

2. A dos grupos de ocho profesores de letras (grupo A) y de ciencias (grupo B) se les ha planteado un test de cultura general con cien preguntas, arrojando el siguiente número de contestaciones acertadas:

Grupo A	46	48	49	50	50	51	52	54
Grupo B	10	18	30	50	50	70	82	90

Halla para cada uno de los grupos la media, moda y mediana, así como la desviación típica. Interpreta los resultados.

Tomamos 1 para las frecuencias

Grupo A media $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{N} = 50$, $\sigma^2 =$, desviación típica $= \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{N}} = 2'29$

Moda = 50, Mediana = 50

Grupo B media $= \bar{x} = 50$, desviación típica $= \sigma = 27'50$

Moda = 50, Mediana = 50

Aunque por término medio son igualmente cultos los de letras que los de ciencias, las culturas de los de letras son muy parecidas ($\sigma = 2'29$) mientras que entre los de ciencias los hay notablemente cultos y notablemente incultos. (Todo ello según el criterio de quien ha inventado los datos de este problema).

Problemas de Variables Estadísticas

1. Construir una tabla similar a la del primer ejemplo para la serie estadística: número de letras de cada palabra del párrafo: "Fenómeno aleatorio ...... colectivo"

   Solución: media 5'36, moda 2, mediana 5

2. Dada la distribución de frecuencias :

x_i	n_i
1	9
2	22
3	13
4	23
5	8
6	25

   a) Constrúyase una tabla en la que aparezcan frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas. b) Represéntese mediante un diagrama de barras la distribución dada y su correspondiente polígono de frecuencias.

3. Represéntese mediante un histograma la siguiente distribución de frecuencias:

L_{i-1} - L_i	n_i
0-10	22
10-20	26
20-30	92
30-40	86
40-50	74
50-60	27
60-70	12

4. Completar los datos que faltan en la tabla siguiente:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0'05	2	0'05
13	4	0'1	6	0'15
16			16	0'4
19	15			
22	6	0'15	37	0'925
25				1

5. Hallar las medidas estadísticas de la distribución de frecuencias del problema 2.

   Solución: media = 3'74, mo = 6, mediana = 4, des.tip. = 1'68, var = 2'83, des.med = 1'45

6. Construir la tabla estadística y calcular la media, varianza y desviación típica para la distribución, (4,3) (5,4) (6,3) (9,2) (10,1), donde la primera coordenada es el valor que toma la variable estadística y la segunda es el número de individuos existentes en la muestra con ese valor.

   Solución: media = 6, mo = 5, mediana = 5, des.tip. = 1'96, var = 3'85

7. Calcular la media y la varianza a partir de la definición para la variable estadística: (2,8) (3,14) (9,2), donde la primera coordenada es el valor que toma la variable estadística y la segunda es el número de individuos existentes en la muestra con ese valor.

8. En un reclutamiento militar se ha tomado una muestra de dieciseis jóvenes obteniéndose las siguientes estaturas en cms. : 172, 161, 168, 182, 167, 179, 175, 198, 180, 166, 164, 174, 185, 177, 191, 173. Escribir la tabla estadística y calcular la media y la desviación típica: a) directamente, b) agrupando los datos en intervalos de 10 cms.

   nota: aunque no lo concreta el problema tomar como extremo más pequeño 160 para unificar: $[160-170)\ldots$

Solución: a) media = 175'75, des. tip. = 9'66; b) media = 176'25, des.tip. = 9'92

9. El número de hijos de 10 familias, seleccionadas aleatoriamente, es el siguiente: 5, 2, 0, 6, 3 ,1, 2, 3, 1, 4. Hallar la mediana y la varianza.

   Solución: media = 2'7, des.tip. = 1'79, mediana = 2'5, var = 3'21

10. Durante el mes de julio, en una determinada ciudad de la costa levantina, se han registrado las siguientes temperaturas máximas: 32, 31, 28, 28, 33, 32, 31, 30, 31, 27, 28, 29, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 29, 30, 31, 30, 34, 33, 33, 32, 33, 32 a) Hallar la moda. b) El recorrido y la varianza.

    Solución: moda = 30, 31, media = 30'58, des.tip. = 1'74, var = 3'02, P_{30} = 30, P_{70} = 32

11. Se ha aplicado un test de capacidad espacial, compuesto por 90 preguntas, a 100 alumnos de 5^o de EGB, habiéndose obtenido los siguientes resultados:

num. de pregs. correctas	num. de alumnos
$[0, 15)$	10
$[15, 30)$	15
$[30, 45)$	25
$[45, 60)$	20
$[60, 75)$	20
$[75, 90)$	10

    a) Hallar la media. b) Hallar la varianza.

    Solución: media = 45'75, des.tip. = 21'98, var = 483'19

12. En una encuesta a 200 personas casadas se les ha preguntado sobre la edad a la que se casaron, obteniéndose la siguiente tabla en la que figuran las edades agrupadas en intervalos:

edades	num. personas
$[20, 24)$	33
$[24, 28)$	97
$[28, 32)$	31
$[32, 36)$	20
$[36, 40)$	19

    Completar la tabla anterior con los representantes de clase, frecuencias acumuladas, etc... Calcular la clase modal, la media, y la desviación típica de la distribución anterior.

    Solución: media = 27'90, des.tip. = 4'65, var = 21'59, clase modal $[24, 28)$

13. En un grupo de sociología se han obtenido las siguientes puntuaciones en un test de habilidad mental:

    50, 23, 45, 36, 56, 34, 56, 67, 45, 34, 23, 45, 23, 67, 54, 21, 34, 43, 12, 78, 36, 49, 53, 27, 66, 31, 45, 22, 33, 44, 48, 53, 57, 77, 31, 23, 47, 52, 33, 37, 64, 21.

    Hallar la media y la desviación típica

    Solución: media = 42'73, des. tip. = 15'938

14. En el departamento de selección de personal de una empresa se ha aplicado un test de inteligencia a los mandos intermedios, obteniéndose los siguientes resultados: 63, 69, 71, 56, 58, 68, 73, 67, 65, 72, 78, 56, 68, 65, 72, 58, 68, 71, 63, 71, 65, 77, 51, 81, 67, 67, 65, 66, 68, 69, 61, 65, 70.

    nota: no agrupar en intervalos

    Solución: media= 66'79, des. tip. = 6'323

15. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de alumnos de una guardería en un test de habilidad psicomotora han sido los siguientes:

puntuaciones	num. de alumnos
$[5, 10)$	3
$[10, 15)$	6
$[15, 20)$	13
$[20, 25)$	7
$[25, 30)$	2

    Hallar la media y la desviación típica.

    Solución: moda = 17'7, mediana = 17'5,

16. Se ha aplicado un test de agresividad a 40 alumnos de 7^o de EGB,

obteniéndose los siguientes resultados:

puntuaciones	num. de alumnos
$[15, 20)$	2
$[20, 25)$	8
$[25, 30)$	13
$[30, 35)$	7
$[35, 40)$	6
$[40, 45)$	3
$[45, 50)$	1

a) Hallar la agresividad media por persona.
c) Calcular la desviación típica.

Solución: media = 30, des.tip. = 7'07, var = 50

17. En una serie estadística hemos obtenido las siguientes sumas:

    $\Sigma x_i n_i = 384$, $\Sigma n_i = 22$, $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i = 169$

    Hallar la media y la desviación típica:

    Solución: media = 17'45, des.tip. = 2'77

8 ESTADISTICA

8.1 Introducción

Fenómeno aleatorio es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

Estadística Descriptiva es la parte de las Matemáticas que se ocupa de proporcionar métodos para recoger, organizar, analizar y resumir datos numéricos de fenómenos aleatorios.

Colectivo o población es el conjunto de elementos con caracteres comunes.

Muestra es un subconjunto o parte representativa de un colectivo.

8.2 Variable estadística

Variable estadística es el carácter común que se considera en los elementos del colectivo. Hay dos tipos cuantitativa y cualitativa, según que el carácter sea numérico o no; ej: colectivo: alumnos de un instituto, variable cualitativa color del pelo, variable cuantitativa estatura.

Nos centraremos en las cuantitativas y representaremos por $\{x_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de valores que toma la variable estadística.

Frecuencia de un valor x_i es el número de veces que se presenta, n_i.

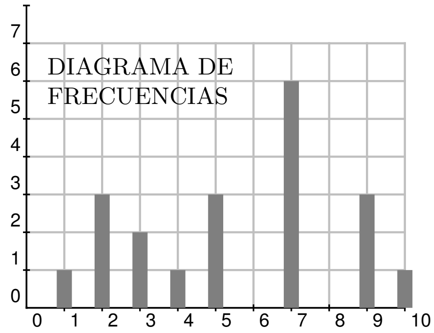
Frecuencia relativa de x_i es la frecuencia dividida por el número de elementos, $f_i = \dfrac{n_i}{\Sigma n_i}$

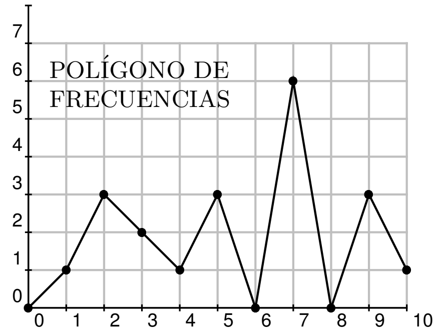
La frecuencia relativa es el tanto por 1, para obtener el porcentaje se multiplica por 100.

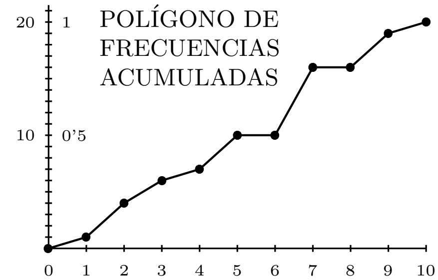
Frecuencia acumulada de x_i es la suma de las frecuencias de x_i y de las anteriores $N_i = \Sigma n_j$ con $j \leq i$, $F_i = \Sigma f_j$ con $j \leq i$.

Ejemplo * Supongamos que las calificaciones de 20 alumnos vienen dadas por la serie estadística:
2,4,5,9,9,10,7,3,2,5,7,3,7,7,5,1,2,7,7,9

var.est	frecuencias	frec. rel	frec. acum.	frec .rel. acum.
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	0	0	0	0
1	1	0'05	1	0'05
2	3	0'15	4	0'20
3	2	0'10	6	0'30
4	1	0'05	7	0'35
5	3	0'15	10	0'50
6	0	0	10	0'50
7	6	0'30	16	0'80
8	0	0	16	0'80
9	3	0'15	19	0'95
10	1	0'05	20	1
	$\Sigma n_i = 20$			







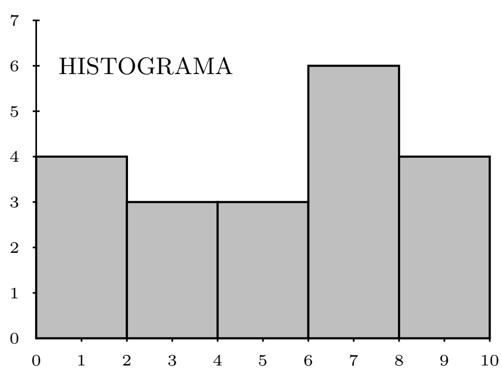
Agrupamiento en clases Si interesa porque hay muchos valores distintos, se suelen agrupar los valores en **intervalos de clase** por ej. las tallas de 5 cm en 5 cm, el centro de cada intervalo se llama **marca de clase** y se considera éste como el valor de la variable estadística.

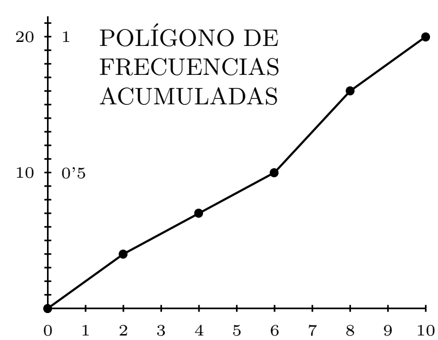
Un criterio para decidir el número de intervalos de clase puede ser el de Norcliffe:

$$\text{n}^0 \text{ de clases} \approx \sqrt{\text{n}^0 \text{ de datos}}$$

En el ejemplo * n^0 clases $\approx \sqrt{20} \approx 5$ intervalos iguales, el intervalo total es 10, la longitud de cada intervalo de clase es $10/5 = 2$

int.clase	marca clase x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
[0,2]	1	4	0'20	4	0'20
(2,4]	3	3	0'15	7	0'35
(4,6]	5	3	0'15	10	0'50
(6,8]	7	6	0'30	16	0'80
(8,10]	9	4	0'20	20	1
	$\Sigma n_i = 20$				





Normalmente interesa dar un resumen numérico de los datos de un fenómeno aleatorio. Para ello se requieren dos números: uno que dé un valor medio representativo y otro que indique lo alejados que están los datos entre sí.

Tenemos entonces las medidas de **centralización** que indican valores medios representativos y las de **dispersión** que indican lo separados que están los datos.

8.3 Medidas de centralización

Se usa el ejemplo* de las notas de clase.

Moda (para datos no agrupados en clases) es el valor de la variable estadística que tiene mayor frecuencia en el ejemplo el 7.

Mediana (para datos no agrupados en clases) es el valor central del conjunto ordenado de datos x_i, el que deja a la izquierda la mitad de los datos. En el ejemplo: 1 2 2 2 3 3 4 5 5 5*7 7 7 7 7 7 9 9 9 10 la mitad está entre $N_i = 10$ y 11, o sea entre 5 y 7, (pasa cuando es par el número de datos) y se toma la semisuma: mediana $= \dfrac{5+7}{2} = 6$.

Media es la media aritmética: se suman todos los datos y se divide por el número de datos.

$$\boxed{\text{media sin frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}}$$

Si conviene considerar las frecuencias, como cada dato se sumaría un número de veces igual a su frecuencia resulta:

$$\boxed{\text{media con frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i}}$$

se añade una columna a la tabla

en el ejemplo: $\bar{x} = \dfrac{111}{20} = 5'55$

x_i	n_i	$x_i.n_i$
1	1	1
2	3	6
3	2	6
4	1	4
5	3	15
7	6	42
9	3	27
10	1	10
		$\Sigma x_i n_i = 111$

8.4 Medidas de dispersión

Se usa el ejemplo* de las notas de clase.

Rango o recorrido es la diferencia entre los valores más grande y más pequeño, en el ejemplo: $10 - 1 = 9$.

Desviación media Desviación de un valor respecto de la media es $x_i - \bar{x}$.

Se llama desviación media a la media de los valores absolutos de las desviaciones. Como los valores absolutos se trabajan mal con calculadora en la práctica se usa:

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$
1	1	-4,55
2	3	-3,55
3	2	-2,55
4	1	-1,55
5	3	-0,55
7	6	1,45
9	3	3,45
10	1	4,45

Desviación típica es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, se representa por σ:

$$\boxed{\text{Desviación típica sin frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N}}}$$

$$\boxed{\text{Desviación típica con frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}}}$$

La calculadora nos da para el ejemplo: $\sigma = 2'67$.

Varianza es el cuadrado de la desviación típica, se representa por σ^2

En el ejemplo: $\sigma^2 = 7'15$.

Las dos medidas más importantes son la **media** y la **desviación típica**, y nos dicen que si tomamos un alumno al azar lo más probable es que haya obtenido una nota próxima a 5'55 con una diferencia de $\pm 2'67$.

Pero sobre todo sirve para comparar dos variables; si otro curso tiene como media 6'5 y desviación típica 1'2, podríamos afirmar con total seguridad que estos últimos alumnos han sacado mejores notas y que éstas son más uniformes.

Funciones estadísticas de la calculadora

ACCIÓN	TECLAS	PANTALLA
modo estadístico	MODE .	SD
limpiar memoria	SHIFT AC	
datos sin frecuencias	x_i M+	x_i
datos con frecuencias	x_i X n_i M+	x_i
borrar dato	C	0
media	SHIFT $\bar{x}$	resultado
desviación típica	SHIFT σ_n	resultado
sumatorios, etc	SHIFT tecla	

Ejemplos

1. Calcular la media y la desviación típica de los datos de la tabla adjunta que resume la observación hecha a 30 niños de edad en meses a la que empiezan a andar

MESES	9	10	11	12	13	14	15
FRECUENCIA	1	2	4	13	6	3	1

Introducimos los datos en la calculadora, (las frecuencias son distintas de 1)

MESES	9	10	11	12	13	14	15
FRECUENCIA	1	2	4	13	6	3	1

$$\text{media} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \frac{364}{30} = 12'13$$

$$\text{desviación típica} = \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}} = 1'26$$

2. A dos grupos de ocho profesores de letras (grupo A) y de ciencias (grupo B) se les ha planteado un test de cultura general con cien preguntas, arrojando el siguiente número de contestaciones acertadas:

Grupo A	46	48	49	50	50	51	52	54
Grupo B	10	18	30	50	50	70	82	90

Halla para cada uno de los grupos la media, moda y mediana, así como la desviación típica. Interpreta los resultados.

Tomamos 1 para las frecuencias

Grupo A $\text{media} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = 50, \quad \sigma^2 = \quad$, desviación típica $= \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{N}} = 2'29$

Moda $= 50$, Mediana $= 50$

Grupo B media $= \bar{x} = 50$, desviación típica $= \sigma = 27'50$

Moda = 50, Mediana = 50

Aunque por término medio son igualmente cultos los de letras que los de ciencias, las culturas de los de letras son muy parecidas ($\sigma = 2'29$) mientras que entre los de ciencias los hay notablemente cultos y notablemente incultos. (Todo ello según el criterio de quien ha inventado los datos de este problema).

Problemas de Variables Estadísticas

1. Construir una tabla similar a la del primer ejemplo para la serie estadística: número de letras de cada palabra del párrafo: “Fenómeno aleatorio ...... colectivo”

   Solución: media 5’36, moda 2, mediana 5

2. Dada la distribución de frecuencias :

x_i	n_i
1	9
2	22
3	13
4	23
5	8
6	25

   a) Constrúyase una tabla en la que aparezcan frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas. b) Represéntese mediante un diagrama de barras la distribución dada y su correspondiente polígono de frecuencias.

3. Represéntese mediante un histograma la siguiente distribución de frecuencias:

L_{i-1} - L_i	n_i
0-10	22
10-20	26
20-30	92
30-40	86
40-50	74
50-60	27
60-70	12

4. Completar los datos que faltan en la tabla siguiente:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0’05	2	0’05
13	4	0’1	6	0’15
16			16	0’4
19	15			
22	6	0’15	37	0’925
25				1

5. Hallar las medidas estadísticas de la distribución de frecuencias del problema 2.

   Solución: media = 3’74, mo = 6, mediana = 4, des.tip. = 1’68, var = 2’83, des.med = 1’45

6. Construir la tabla estadística y calcular la media, varianza y desviación típica para la distribución, (4,3) (5,4) (6,3) (9,2) (10,1), donde la primera coordenada es el valor que toma la variable estadística y la segunda es el número de individuos existentes en la muestra con ese valor.

   Solución: media = 6, mo = 5, mediana = 5, des.tip. = 1’96, var = 3’85

7. Calcular la media y la varianza a partir de la definición para la variable estadística: (2,8) (3,14) (9,2), donde la primera coordenada es el valor que toma la variable estadística y la segunda es el número de individuos existentes en la muestra con ese valor.

8. En un reclutamiento militar se ha tomado una muestra de dieciseis jóvenes obteniéndose las siguientes estaturas en cms. : 172, 161, 168, 182, 167, 179, 175, 198, 180, 166, 164, 174, 185, 177, 191, 173. Escribir la tabla estadística y calcular la media y la desviación típica: a) directamente, b) agrupando los datos en intervalos de 10 cms.

   nota: aunque no lo concreta el problema tomar como extremo más pequeño 160 para unificar: $[160 - 170)\ldots$

Solución: a) media = 175'75, des. tip. = 9'66; b) media = 176'25, des.tip. = 9'92

9. El número de hijos de 10 familias, seleccionadas aleatoriamente, es el siguiente: 5, 2, 0, 6, 3 ,1, 2, 3, 1, 4. Hallar la mediana y la varianza.

   Solución: media = 2'7, des.tip. = 1'79, mediana = 2'5, var = 3'21

10. Durante el mes de julio, en una determinada ciudad de la costa levantina, se han registrado las siguientes temperaturas máximas: 32, 31, 28, 28, 33, 32, 31, 30, 31, 27, 28, 29, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 29, 30, 31, 30, 34, 33, 33, 32, 33, 32 a) Hallar la moda. b) El recorrido y la varianza.

    Solución: moda = 30, 31, media = 30'58, des.tip. = 1'74, var = 3'02, P_{30} = 30, P_{70} = 32

11. Se ha aplicado un test de capacidad espacial, compuesto por 90 preguntas, a 100 alumnos de 5^o de EGB, habiéndose obtenido los siguientes resultados:

num. de pregs. correctas	num. de alumnos
$[0, 15)$	10
$[15, 30)$	15
$[30, 45)$	25
$[45, 60)$	20
$[60, 75)$	20
$[75, 90)$	10

    a) Hallar la media. b) Hallar la varianza.

    Solución: media = 45'75, des.tip. = 21'98, var = 483'19

12. En una encuesta a 200 personas casadas se les ha preguntado sobre la edad a la que se casaron, obteniéndose la siguiente tabla en la que figuran las edades agrupadas en intervalos:

edades	num. personas
$[20, 24)$	33
$[24, 28)$	97
$[28, 32)$	31
$[32, 36)$	20
$[36, 40)$	19

    Completar la tabla anterior con los representantes de clase, frecuencias acumuladas, etc... Calcular la clase modal, la media, y la desviación típica de la distribución anterior.

    Solución: media = 27'90, des.tip. = 4'65, var = 21'59, clase modal $[24, 28)$

13. En un grupo de sociología se han obtenido las siguientes puntuaciones en un test de habilidad mental:

    50, 23, 45, 36, 56, 34, 56, 67, 45, 34, 23, 45, 23, 67, 54, 21, 34, 43, 12, 78, 36, 49, 53, 27, 66, 31, 45, 22, 33, 44, 48, 53, 57, 77, 31, 23, 47, 52, 33, 37, 64, 21.

    Hallar la media y la desviación típica

    Solución: media = 42'73, des. tip. = 15'938

14. En el departamento de selección de personal de una empresa se ha aplicado un test de inteligencia a los mandos intermedios, obteniéndose los siguientes resultados: 63, 69, 71, 56, 58, 68, 73, 67, 65, 72, 78, 56, 68, 65, 72, 58, 68, 71, 63, 71, 65, 77, 51, 81, 67, 67, 65, 66, 68, 69, 61, 65, 70.

    nota: no agrupar en intervalos

    Solución: media= 66'79, des. tip. = 6'323

15. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de alumnos de una guardería en un test de habilidad psicomotora han sido los siguientes:

puntuaciones	num. de alumnos
$[5, 10)$	3
$[10, 15)$	6
$[15, 20)$	13
$[20, 25)$	7
$[25, 30)$	2

    Hallar la media y la desviación típica.

    Solución: moda = 17'7, mediana = 17'5,

16. Se ha aplicado un test de agresividad a 40 alumnos de 7^o de EGB,

obteniéndose los siguientes resultados:

puntuaciones	num. de alumnos
$[15, 20)$	2
$[20, 25)$	8
$[25, 30)$	13
$[30, 35)$	7
$[35, 40)$	6
$[40, 45)$	3
$[45, 50)$	1

a) Hallar la agresividad media por persona.
c) Calcular la desviación típica.

Solución: media = 30, des.tip. = 7'07, var = 50

17. En una serie estadística hemos obtenido las siguientes sumas:

$\Sigma x_i n_i = 384$, $\Sigma n_i = 22$, $\Sigma (x_i - \bar{x})^2 n_i = 169$

Hallar la media y la desviación típica:

Solución: media = 17'45, des.tip. = 2'77

9 SUPERFICIES Y VOLÚMENES

9.1 Áreas de polígonos

Recordar que 1 hectárea=10.000 m^2

Cuadrado El área del cuadrado es igual al lado elevado al cuadrado: $A = l^2$

Rectángulo El área del rectángulo es igual a base por altura: $A = b \cdot h$

Paralelogramo El área de un paralelogramo es igual a base por altura: $A = b \cdot h$

Rombo El área de un rombo es el producto de las diagonales partido por dos $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

Triángulo El área del triángulo es igual a base por altura partido por 2: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Trapecio.

El área del trapecio es igual a la suma de las bases por altura partido por 2: $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

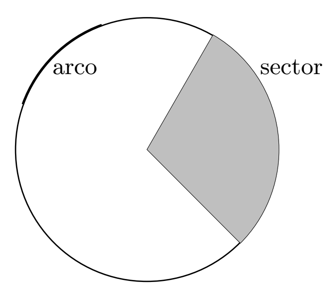
Polígono regular.

El área de un polígono regular es igual a perímetro por apotema partido por 2: $A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

Longitud de la circunferencia y área del círculo

- Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$
- Área del círculo: $S = \pi r^2$

Longitud del arco y área del sector Recordemos que un trozo de circunferencia se llama **arco**. Si el arco lo dan en grados su longitud se halla por regla de tres.



Un trozo de círculo entre dos radios se llama **sector**. El área del sector es igual a la longitud del arco por el radio dividido por dos.

Ejemplos

- Calcular la longitud del arco de una circunferencia de radio 5 m de 120 grados.

  Longitud de la circunferencia $L = 2.3'1416.5 = 31'416$

  Para la del arco hacemos una regla de tres:

  $\begin{array}{ccc} 360^0 & -- & 31'416 \\ 120^0 & -- & x \end{array}$. Luego $x = \dfrac{31'416 \cdot 120}{360} = 10'47$ m

- Si la circunferencia de la Tierra es aproximadamente de 40.000 km. Londres y Alicante están en el mismo meridiano separadas por un arco de 13^0. Calcular la distancia entre las dos ciudades.

  $\begin{array}{ccc} 360^0 & -- & 40000 \text{ km} \\ 13^0 & -- & x \end{array}$. Luego $x = \dfrac{13 \cdot 40000}{360} = 1444'4$ km

- Calcular el área de un sector circular de 30^0 de un círculo de radio 8 metros.

  Longitud de la circunferencia $L = 2.3'1416.8 = 50.2656$

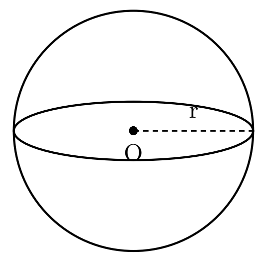
  Para la del arco hacemos una regla de tres:

  $\begin{array}{ccc} 360^0 & -- & 50\text{'}2656 \\ 30^0 & -- & x \end{array}$. Luego $x = \dfrac{50'2656 \cdot 30}{360} = 4'1888$

  Área del sector $A = \dfrac{4'1888 \cdot 8}{2} = 16.75$ m^2

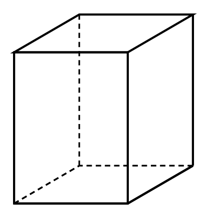
9.2 Volúmenes y superficies de los cuerpos geométricos

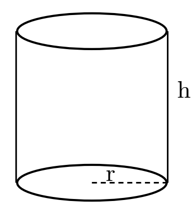
- La superficie de la esfera es: $S = 4.\pi.r^2$
- El volumen de la esfera es $V = \dfrac{4}{3}.\pi.r^3$



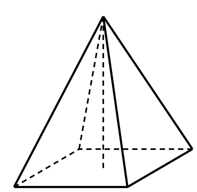
- El volumen de los prismas y cilindros es el área de la base por la altura.

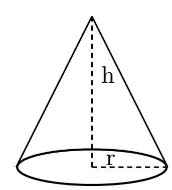
  En particular:
  El volumen del cubo es $V = a^3$, el cubo de la arista.
  El volumen del prisma cuadrangular (caja zapatos) es el producto de las tres dimensiones largo por ancho por alto. $V = a.b.c$





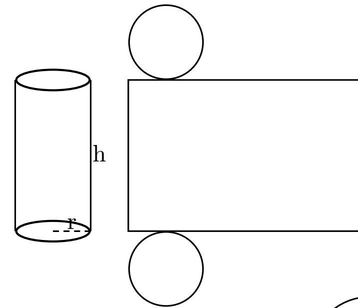
- El volumen de los conos y pirámides es 1/3 del área de la base por la altura.



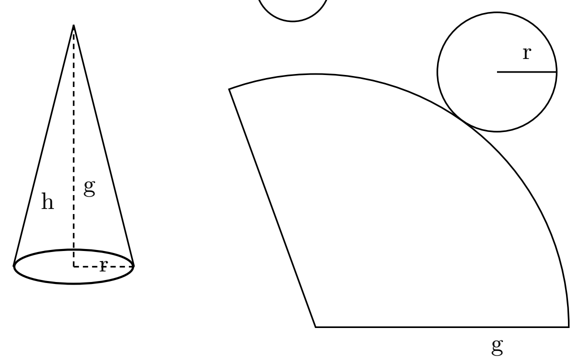


Para hallar las superficies se hacen los desarrollos que consisten en cortar y extender.

- Superficie del cilindro
  Al hacer el desarrollo se tienen dos bases circulares y la superficie lateral, que es un rectángulo de largo igual a la longitud de la circunferencia de la base del cilindro



- Superficie del cono
  La base es un círculo y la superficie lateral un sector circular de radio la generatriz (g) y longitud del arco igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono.

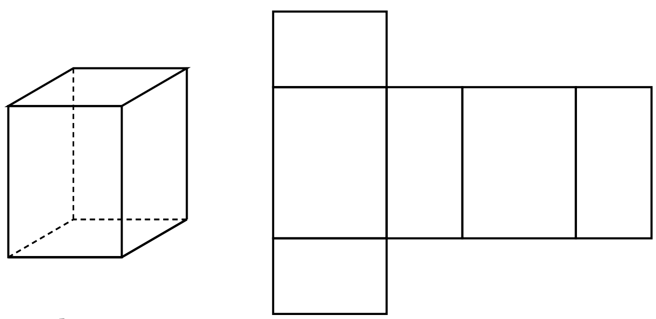


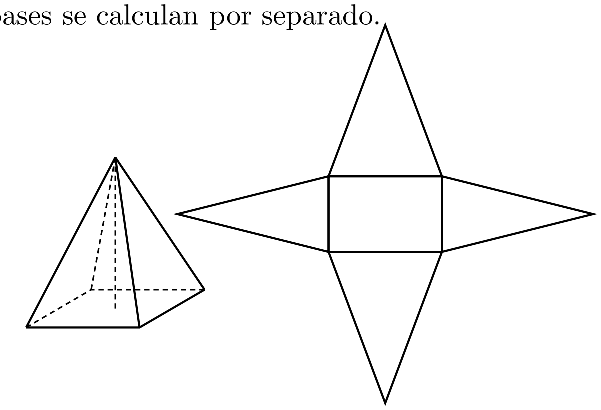
  nota: Área del sector circular $S = \dfrac{l.r}{2}$ en consecuencia:

  Superficie lateral del cono $S_{lat} = \dfrac{2\pi r.g}{2}$

- Prismas y pirámides

  Las caras son polígonos. La superficie lateral y las bases se calculan por separado.





Ejemplos:

- La torre de una iglesia tiene forma de cilindro de 6 m de altura y 3'5 m de radio, terminado en un cono de 3 m de alto. Hallar el volumen de la torre.

  Área de la base $A = 3'1416.3'5 = 38'48$ m^2

  Volumen del cilindro: $V_{cil} = 38'48.6 = 230'90$ m^3

  Volumen del cono: $V_{con} = \frac{38'48.3}{3} = 38'48$ m^3

  Volumen total: $V = 230'90 + 38'48 = 269'38$ m^3

- Hallar el volumen y la superficie de una caja de cartón cúbica de 80 cm de arista.

  Volumen $V = a^3 = 80^3 = 512000$ cm^3 $= 512$ litros

  Área $A = 6.a^2 = 6.80^2 = 6400$ cm^2 $= 6'4$ m^2.

- Hallar la superficie y el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 4 y altura 1'5.

  Altura de una cara: $h_c^2 = 2^2 + 1'5^2 = 6'25, h_c = 2'5$

Superficie total S= 4 caras triangulares + base: S= $4.5 + 16 = 36u^2$

$V = \frac{1}{3}16.1'5 = 8u^3$

- Hallar la superficie y el volumen de un cono de radio de la base 3 y altura 4.

  generatriz: $g^2 = 3^2 + 4^2 = 25, g = 5$

  Área de la base $S_{base} = \pi.3^2 = 28'27$; Superficie lateral $S_{lat} = \frac{2\pi r.g}{2} = 47'1$;

  Superficie total $S = 75'36u^2$

  $V = \frac{1}{3}28'27.4 = 37'68u^3$

Problemas de Geometría Plana

1. De un triángulo rectángulo se sabe que los catetos miden 132 y 85 unidades, hallar la hipotenusa y el área.

2. De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa vale 65 unidades y un cateto 33 unidades, hallar el otro cateto y dibujar el triángulo.

3. Una escalera de 3 metros está apoyada contra un pared con la parte inferior en al suelo a 90 cm. de la pared. ¿A qué altura llega?

4. Utilizando el teorema de Pitágoras halla la distancia entre los puntos $A(6,-2), B(-1,4)$

5. Calcular la altura en un triángulo equilátero de lado 5.

6. Para medir la altura de un árbol hacemos lo siguiente, medimos la sombra del árbol y es 12 metros, medimos la sombra de un palo de 90 cm y es 74 cm, ¿Cual es la altura del árbol?.

7. Dos poblaciones están separadas 45 mm en un mapa 1 : 200.000, ¿cuál es la distancia real entre las poblaciones?

8. Hallar la razón de semejanza que transforma un Din A3 en un Din A4.

9. Aproximadamente el diámetro de la Tierra es $12'7.10^3$ km, el del Sol $13'9.10^5$ km, la distancia de la Tierra al Sol $108'2.10^6$ km. Tomando como representante de la Tierra una lenteja de 4 mm de diámetro hacer un modelo proporcional de la Tierra, el Sol y la distancia que los separa.

   Solución: sol 43'7 cm, dist 34'07 m

10. Un átomo consiste en un núcleo formado por protones y neutrones y una serie de electrones que giran alrededor. El diámetro de un electrón es aproximadamente $5'6.10^{-15}$ m. El radio del átomo de aluminio es $1'18.10^{-8}$ cm., supongamos que el núcleo tiene de diámetro 10^-12 cm. y giran alrededor de él 13 electrones. Tomando como representante del electrón una lenteja de 4 mm de diámetro imaginar un modelo proporcional del diámetro del núcleo, el electrón más exterior y la distancia que los separa.

11. Una caja de zapatos de medidas 20cm de ancho por 9cm de alto por 35cm de largo es modelo a escala del aula que tiene 8 m de ancho. Hallar en metros cuadrados y cúbicos respectivamente de la superficie del suelo del aula y del volumen del aula. Comprueba la relación de la razón de semejanza con las longitudes, áreas y volúmenes.

    Solución: 112 m^2, 403'2 m^3

12. Una rueda ha dado 3.470 vueltas para recorrer 3.680 metros. ¿Cuánto mide su radio?

13. El borde de un estanque circular mide 64 metros. ¿Cuál es su superficie?

14. Calcula en milímetros cuadrados el área de una moneda de 50 céntimos.

15. Sobre una plaza de toros de 16 metros de radio se quieren echar 25 kilogramos de arena por metro cuadrado. ¿Cuántas toneladas métricas serán necesarias? ¿Cuántos carretillas de 48 kilogramos cada una habrá que echar?

16. Calcula el área de un sector cuyo arco equivale a 2/3 de la semicircunferencia y cuyo radio mide 4 metros.

17. Calcula el área de un segmento de 148^0 sabiendo que corresponde a un círculo de 3 metros de radio, que la longitud de la cuerda es de 5'6 metros y que la altura del triángulo es de 1'2 metros.

18. Halla el área de un sector de 86^0 que pertenece a un círculo de 7 metros de radio.

19. Un círculo tiene 32 metros cuadrados de superficie. ¿Cuánto medirá su radio?

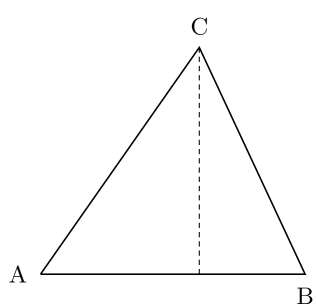
20. Un segmento circular de 96^0 pertenece a un círculo de 2'3 metros de radio. Su cuerda mide 4 metros y la altura del triángulo correspondiente mide 1'25 metros. ¿Cuál es su área?

21. El radio mayor de una corona circular mide 8 metros y el menor 6'5 metros. ¿Cuál será el área de dicha corona?

22. Las longitudes de los lados de un triángulo en mm son $a = 39, b = 45, c = 42$. Medir la altura sobre c y el área.

    Solución: h=36, área= 756

23. Las longitudes de los lados son $a = 13, b = 15, c = 14$. Hallar la altura sobre c y el área.



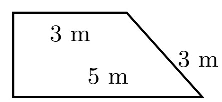
24. Un solar de forma de trapecio mide 250 metros cuadrados. Si la distancia entre las bases es de 10 metros, ¿cuánto mide cada base, sabiendo que una mide 10 metros más que la otra?

25. Un cuadrado tiene una superficie de 680 metros cuadrados. ¿Cuál será la longitud de cada uno de sus lados?

    Solución: 26'07 m

26. Se quiere embaldosar un patio exagonal con baldosas cuadradas de 0'25 metros de lado. Si cada lado del patio mide 4'30 metros, ¿cuántas baldosas se necesitarán?

27. Calcular la altura del trapecio de la figura y su área.



28. Calcular el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 7.

29. Calcular el área de un triángulo isósceles que tiene la base de 12 cm y cada uno de los lados iguales de 10 cm.

30. Si la circunferencia de la Tierra son 40000 km ¿cuánto vale el radio de la Tierra?

31. Calcular el área de un sector de un círculo de radio 2 de120^0 grados.

Problemas de cuerpos geométricos

1. Las aristas de un octaedro regular miden 0'40 metros. ¿Cuál será el área total de dicho octaedro?

   Solución: 0'544 m^2

2. Las aristas de un exaedro o cubo miden 0'80 metros. ¿Cuál es su área total?

3. Un prisma pentagonal regular tiene: 0'60 metros de lado, 0'52 metros de apotema y 4 metros de altura. Halla su área lateral y total y su volumen.

4. Un depósito que tiene forma de prisma cuadrangular mide 8 metros de largo, 3'15 de ancho y 1,6 de alto. ¿Cuántos litros de agua hace?

   Solución: 49'32 m^3

5. Una tienda de campaña de forma de pirámide exagonal mide 1'5 metros de lado y 2'25 metros de altura en sus caras. ¿Cuánto valdrá la tela empleada en ella, a razón de 45'5 pesetas el metro?

6. Una de las pirámides de Egipto tiene 145 metros de altura. Si su base es un cuadrado de 232 metros de lado, ¿cuál es el volumen de la citada pirámide?

   Solución: 2601493'3 m^3

7. Una barra de plata tiene forma de prisma exagonal. Los lados de la base miden 3 centímetros; su apotema, 2'6 centímetros y su longitud es de 50 centímetros. ¿Cuántos gramos pesará dicha barra, sabiendo que la densidad de la plata es de 10'47?

8. Se quiere construir un frontón de 15 metros de largo, 0'60 de grueso y 12 metros de altura. Para ello se han de emplear ladrillos cuyas dimensiones son 0'30, 016 y 0'08 metros. ¿Cuántos ladrillos harán falta?

9. En un almacén de una editorial hay una pila de Enciclopedias que mide 12 metros de larga, 3 de ancha y 4 de altura. Si el volumen de cada libro es de 0'0007 metros cúbicos. ¿cuántos libros habrá en la citada pila?

   Solución: V=144, 205714 libros aprox

10. Se quiere cubrir con chapa de cinc un tejadillo de forma de pirámide exagonal. Si el lado de la base mide 2'60 metros y la altura de sus caras es de 3'25 metros, ¿cuánto valdrá el cine necesario, a razón de 48'5 pesetas el metro cuadrado?

11. Un cilindro tiene 0'85 metros de radio y 5 metros de altura. ¿Cuál es su área y su volumen?

    Solución: S=31'22, V=11'3

12. Un tronco de árbol de forma cilíndrica tiene 0'60 metros de diámetro y 3 metros de altura. ¿Cuál es su superficie y cuál es su volumen?

    Solución: S=5'93, V=0'84

13. Un pozo de forma cilíndrica hace 74.000 lítros de agua. Si el diámetro de su boca es de 2'5 metros, ¿cuál será su profundidad?

    Solución: 15'10

14. Un cono tiene las siguientes dimensiones: 0'4 metros de radio, 1'2 metros de altura. ¿Cuál será su área y cuál su volumen?

    Solución: V=0'2, S=2'08

15. Un montón de grano de forma cónica mide 8'4 metros de circunferencia y 1'3 metros de altura. ¿Cuántos hectolitros de grano hay en dicho montón?

    Solución: V=2'405 m^3

16. Una bomba al caer ha hecho un hoyo de forma cónica. La circunferencia de la boca mide 32 metros y su profundidad es de 4'5 metros, ¿Cuál es el volumen de la tierra desplazada?

    Solución: 122'025 m^3

17. Calcula la superficie y el volumen de una pelota que tiene 8 centímetros de diámetro.

    Solución: S= 200'96, V=267'9

18. Calcula en kilómetros cuadrados y cúbicos la superficie y el volumen de la Tierra, sabiendo que el cuadrante de uno de sus meridianos mide 10.000.000 de metros.

19. Sabiendo que una esfera mide en su circunferencia máxima, 0'160 metros, determina su área y su volumen.

    Solución: S=78'5, V=65'3

20. Se quieren forrar con badana 380 balones de 0'24 metros de diámetro. Si la badana vale a 2'50 euros el metro cuadrado, ¿cuánto importará el forro de todos los balones?

    Solución: 171'82

21. Un globo de forma esférica tiene 38 metros de circunferencia máxima. ¿Cuál es su superficie y cuál es su volumen?

22. E1 lado de un triángulo equilátero mide 5 metros. ¿Cuál es su área?

23. Una pirámide exagonal, regular, recta, tiene 4 metros de lado, 3'5 de apotema y sus triángulos laterales miden 10 metros de altura ¿Cuál es su área total? ¿Cuál es su altura? (Teorema de Pitágoras.) Determinada la altura, halla el volumen.

24. El diámetro de la base de un cono es de 0'80 metros, y la altura de su cara lateral, 1'25 metros. ¿Cuál es su área total? ¿Cuál es su altura? Determinada ésta, halla su volumen.

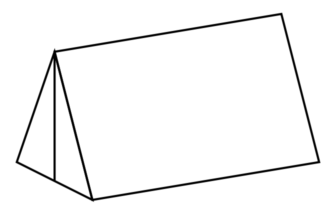
25. La base de un triángulo isósceles mide 16 metros y uno de sus lados iguales 24 metros. ¿Cuánto mide su altura y cuál es su área?

26. Un cuadrado de 6 metros de lado está inscrito en una circunferencia. Halla la longitud de ésta y el área del círculo comprendido.

    Solución: long=26'62, S= 56'44

27. Hallar la superficie de una lata de Fanta.

28. Hallar el volumen y los metros cuadrados de lona que tiene la tienda de campaña de la figura, si es un prisma triangular, siendo las bases triángulos equiláteros de lado 2 m. y la longitud del lateral es 3'5 m.



29. En un recipiente cilíndrico de diámetro 6cm parcialmente lleno de agua sumergimos una patata, el nivel de agua sube 3cm ¿Cuál es el volumen de la patata?

    Solución: 84'8 cm^3

30. Calcular los metros cúbicos de hormigón necesarios para construir un dique de 2 metros de alto, 28 de largo y 40 cm de espesor.

31. Hallar la superficie de un tetraedro regular de 7cm de arista.

    Solución: 84'84 cm^2

32. Cuántos metros cúbicos de tierra hay que sacar para construir un túnel de 800 m de largo que tiene de sección un semicírculo de 7 metros de diámetro.

33. Hallar la arista del cubo que tiene el mismo volumen que una esfera de 10 cm de diámetro.

34. Hallar el volumen de un prisma exagonal de altura 13'5 m, y que tiene de base un exágono regular de lado 2.

35. Hallar el volumen y la superficie de un cono de altura 27 cm y radio de la base 5 cm.